

## SUJETS BAC

### ❖ Baccalauréat Amérique du Nord 22 mai 2025 ❖

#### Sujet 2

#### ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

##### EXERCICE 1

**5 points**

Au basket-ball, il est possible de marquer des paniers rapportant un point, deux points ou trois points.

Les parties **A** et **B** sont indépendantes.

##### Partie A

L'entraîneur d'une équipe de basket décide d'étudier les statistiques de réussite des lancers de ses joueurs. Il constate qu'à l'entraînement, lorsque Victor tente un panier à trois points, il le réussit avec une probabilité de 0,32.

Lors d'un entraînement, Victor effectue une série de 15 lancers à trois points. On suppose que ces lancers sont indépendants.

On note  $N$  la variable aléatoire qui donne le nombre de paniers marqués.

*Les résultats des probabilités demandées seront, si nécessaire, arrondis au millième.*

1. On admet que la variable aléatoire  $N$  suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.
2. Calculer la probabilité que Victor réussisse exactement 4 paniers lors de cette série.
3. Déterminer la probabilité que Victor réussisse au plus 6 paniers lors de cette série.
4. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire  $N$ .
5. On note  $T$  la variable aléatoire qui donne le nombre de **points** marqués après cette série de lancers.
  - a. Exprimer  $T$  en fonction de  $N$ .
  - b. En déduire l'espérance de la variable aléatoire  $T$ . Donner une interprétation de cette valeur dans le contexte de l'exercice.
  - c. Calculer  $P(12 \leq T \leq 18)$ .

## Partie B

On note  $X$  la variable aléatoire donnant le nombre de points marqués par Victor lors d'un match.

On admet que l'espérance  $E(X) = 22$  et la variance  $V(X) = 65$ .

Victor joue  $n$  matchs, où  $n$  est un nombre entier strictement positif.

On note  $X_1, X_2, \dots, X_n$  les variables aléatoires donnant le nombre de points marqués au cours des 1<sup>er</sup>, 2<sup>e</sup>, ...,  $n$ -ième matchs. On admet que les variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont indépendantes et suivent la même loi que celle de  $X$ .

On pose  $M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ .

1. Dans cette question, on prend  $n = 50$ .

- Que représente la variable aléatoire  $M_{50}$  ?
- Déterminer l'espérance et la variance de  $M_{50}$ .
- Démontrer que  $P(|M_{50} - 22| \geq 3) \leq \frac{13}{90}$ .
- En déduire que la probabilité de l'événement «  $19 < M_{50} < 25$  » est strictement supérieure à 0,85.

2. Indiquer, en justifiant, si l'affirmation suivante est vraie ou fausse :

« Il n'existe aucun entier naturel  $n$  tel que  $P(|M_n - 22| \geq 3) < 0,01$  ».

## EXERCICE 2

**5 points**

Un des objectifs de cet exercice est de déterminer une approximation du nombre réel  $\ln(2)$ , en utilisant une des méthodes du mathématicien anglais Henry Briggs au XVI<sup>e</sup> siècle.

On désigne par  $(u_n)$  la suite définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n}$$

### Partie A

1.
  - a. Donner la valeur exacte de  $u_1$  et de  $u_2$ .
  - b. Émettre une conjecture, à l'aide de la calculatrice, sur le sens de variation et la limite éventuelle de la suite.
2.
  - a. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$ .
  - b. En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente.
  - c. Résoudre dans l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  l'équation  $\sqrt{x} = x$ .
  - d. Déterminer, en justifiant, la limite de la suite  $(u_n)$ .

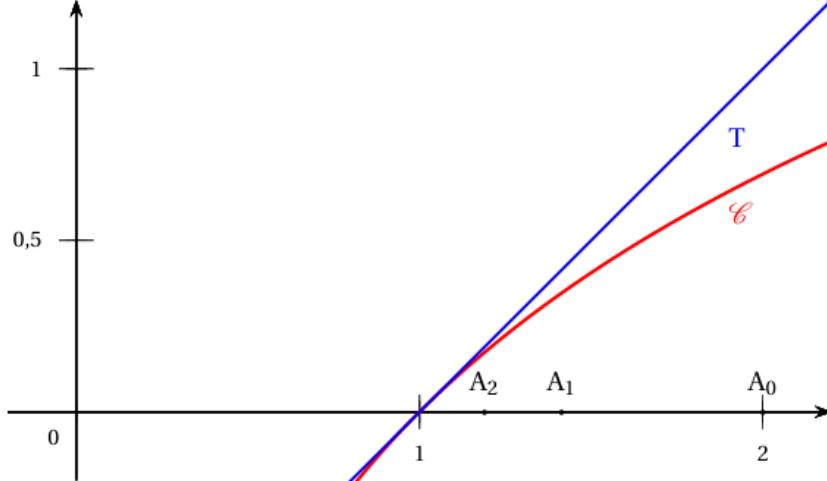
## Partie B

On désigne par  $(v_n)$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$  par  $v_n = \ln(u_n)$ .

1.
  - a. Démontrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique de raison  $\frac{1}{2}$ .
  - b. Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ , pour tout entier naturel  $n$ .
  - c. En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $\ln(2) = 2^n \ln(u_n)$ .
2. On a tracé ci-dessous dans un repère orthonormé la courbe  $\mathcal{C}$  de la fonction  $\ln$  et la tangente  $T$  à la courbe  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse 1.

Une équation de la droite  $T$  est  $y = x - 1$ .

Les points  $A_0, A_1, A_2$  ont pour abscisses respectives  $u_0, u_1$  et  $u_2$  et pour ordonnée 0.



On décide de prendre  $x - 1$  comme approximation de  $\ln(x)$  lorsque  $x$  appartient à l'intervalle  $]0,99 ; 1,01[$ .

- a. Déterminer à l'aide de la calculatrice le plus petit entier naturel  $k$  tel que  $u_k$  appartienne à l'intervalle  $]0,99 ; 1,01[$  et donner une valeur approchée de  $u_k$  à  $10^{-5}$  près.
  - b. En déduire une approximation de  $\ln(u_k)$ .
  - c. Déduire des questions 1. c. et 2. b. de la partie B une approximation de  $\ln(2)$ .
3. On généralise la méthode précédente à tout réel  $a$  strictement supérieur à 1.  
Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin que l'appel `Briggs(a)` renvoie une approximation de  $\ln(a)$ .

On rappelle que l'instruction en langage Python `sqrt(a)` correspond à  $\sqrt{a}$ .

```
from math import*
def Briggs(a):
    n = 0
    while a >= 1.01:
        a = sqrt(a)
        n = n+1
    L = ...
return L
```

### EXERCICE 3

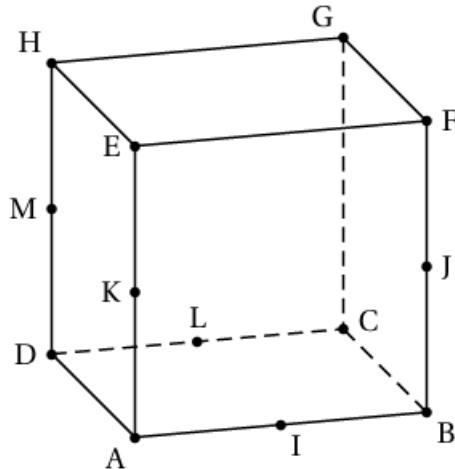
**5 points**

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée.

Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

#### PARTIE A

ABCDEFGH est un cube d'arête de longueur 1.  
Les points I, J, K, L et M sont les milieux respectifs des arêtes [AB], [BF], [AE], [CD] et [DH].



**Affirmation 1 :** «  $\vec{JH} = 2\vec{BI} + \vec{DM} - \vec{CB}$  »

**Affirmation 2 :** « Le triplet de vecteurs  $(\vec{AB}, \vec{AH}, \vec{AG})$  est une base de l'espace. »

**Affirmation 3 :** «  $\vec{IB} \cdot \vec{LM} = -\frac{1}{4}$ . »

#### PARTIE B

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère :

- le plan  $\mathcal{P}$  d'équation cartésienne  $2x - y + 3z + 6 = 0$
- les points A(2 ; 0 ; -1) et B(5 ; -3 ; 7)

**Affirmation 4 :** « Le plan  $\mathcal{P}$  et la droite (AB) sont parallèles. »

**Affirmation 5 :** « Le plan  $\mathcal{P}'$  parallèle à  $\mathcal{P}$  passant par B a pour équation cartésienne  $-2x + y - 3z + 34 = 0$  »

**Affirmation 6 :** « La distance du point A au plan  $\mathcal{P}$  est égale à  $\frac{\sqrt{14}}{2}$ . »

On note  $(d)$  la droite de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = -12 + 2k \\ y = 6 \\ z = 3 - 5k \end{cases}, \text{ où } k \in \mathbb{R}$$

**Affirmation 7 :** « Les droites (AB) et  $(d)$  ne sont pas coplanaires. »

## EXERCICE 4

**5 points**

On désigne par  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0 ; \pi]$  par

$$f(x) = e^x \sin(x).$$

On note  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère.

### PARTIE A

1. a. Démontrer que pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0 ; \pi]$ ,

$$f'(x) = e^x [\sin(x) + \cos(x)].$$

- b. Justifier que la fonction  $f$  est strictement croissante sur l'intervalle  $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$

2. a. Déterminer une équation de la tangente  $T$  à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse 0.

- b. Démontrer que la fonction  $f$  est convexe sur l'intervalle  $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ .

- c. En déduire que pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $e^x \sin(x) \geqslant x$ .

3. Justifier que le point d'abscisse  $\frac{\pi}{2}$  de la courbe représentative de la fonction  $f$  est un point d'inflexion.

### PARTIE B

On note

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin(x) dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x) dx.$$

1. En intégrant par parties l'intégrale  $I$  de deux manières différentes, établir les deux relations suivantes :

$$I = 1 + J \quad \text{et} \quad I = e^{\frac{\pi}{2}} - J.$$

2. En déduire que  $I = \frac{1 + e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$ .

3. On note  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = x$ .

Les courbes représentatives des fonctions  $f$  et  $g$  sont tracées dans le repère orthogonal ci-dessous sur l'intervalle  $[0 ; \pi]$ .

Calculer la valeur exacte de l'aire du domaine hachuré situé entre les courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  et les droites d'équation  $x = 0$  et  $x = \frac{\pi}{2}$ .

