

## SUJETS BAC

❖ Baccalauréat Asie 11 juin 2024 ❖

### Sujet 2

## ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

### EXERCICE 1

**5,5 points**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par

$$f(x) = x^2 - x \ln(x).$$

On admet que  $f$  est deux fois dérivable sur  $]0 ; +\infty[$ .

On note  $f'$  la fonction dérivée de la fonction  $f$  et  $f''$  la fonction dérivée de la fonction  $f'$ .

#### Partie A : Étude de la fonction $f$

1. Déterminer les limites de la fonction  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .
2. Pour tout réel  $x$  strictement positif, calculer  $f'(x)$ .
3. Montrer que pour tout réel  $x$  strictement positif :

$$f''(x) = \frac{2x - 1}{x}.$$

4. Étudier les variations de la fonction  $f'$  sur  $]0 ; +\infty[$ , puis dresser le tableau des variations de la fonction  $f'$  sur  $]0 ; +\infty[$ .

On veillera à faire apparaître la valeur exacte de l'extremum de la fonction  $f'$  sur  $]0 ; +\infty[$ .

Les limites de la fonction  $f'$  aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.

5. Montrer que la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $]0 ; +\infty[$ .

#### Partie B : Étude d'une fonction auxiliaire pour la résolution de l'équation $f(x) = x$

On considère dans cette partie la fonction  $g$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par

$$g(x) = x - \ln(x).$$

On admet que la fonction  $g$  est dérivable sur  $]0 ; +\infty[$ , on note  $g'$  sa dérivée.

1. Pour tout réel strictement positif, calculer  $g'(x)$ , puis dresser le tableau des variations de la fonction  $g$ .  
Les limites de la fonction  $g$  aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.
2. On admet que 1 est l'unique solution de l'équation  $g(x) = 1$ .  
Résoudre, sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ , l'équation  $f(x) = x$ .

#### Partie C : Étude d'une suite récurrente

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = \frac{1}{2}$  et pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_{n+1} = f(u_n) = u_n^2 - u_n \ln(u_n).$$

- Montrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$  :

$$\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1.$$

- Justifier que la suite  $(u_n)$  converge.

On appelle  $\ell$  la limite de la suite  $(u_n)$  et on admet que  $\ell$  vérifie l'égalité  $f(\ell) = \ell$ .

- Déterminer la valeur de  $\ell$ .

## EXERCICE 2

**5,5 points**

*Léa passe une bonne partie de ses journées à jouer à un jeu vidéo et s'intéresse aux chances de victoire de ses prochaines parties.*

*Elle estime que si elle vient de gagner une partie, elle gagne la suivante dans 70 % des cas.*

*Mais si elle vient de subir une défaite, d'après elle, la probabilité qu'elle gagne la suivante est de 0,2.*

*De plus, elle pense avoir autant de chance de gagner la première partie que de la perdre.  
On s'appuiera sur les affirmations de Léa pour répondre aux questions de cet exercice.*

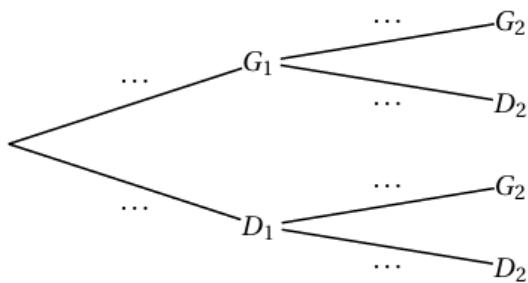
Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on définit les évènements suivants :

- $G_n$  : « Léa gagne la  $n$ -ième partie de la journée »;
- $D_n$  : « Léa perd la  $n$ -ième partie de la journée ».

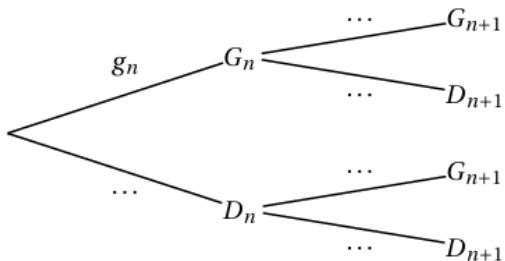
Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on note  $g_n$  la probabilité de l'évènement  $G_n$ .

On a donc  $g_1 = 0,5$ .

- Quelle est la valeur de la probabilité conditionnelle  $p_{G_1}(D_2)$ ?
- Recopier et compléter l'arbre des probabilités ci-dessous qui modélise la situation pour les deux premières parties de la journée :



3. Calculer  $g_2$ .
4. Soit  $n$  un entier naturel non nul.
  - a. Recopier et compléter l'arbre des probabilités ci-dessous qui modélise la situation pour les  $n$ -ième et  $(n+1)$ -ième parties de la journée.



- b. Justifier que pour tout entier naturel  $n$  non nul,
- $$g_{n+1} = 0,5g_n + 0,2.$$
5. Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on pose  $v_n = g_n - 0,4$ .
    - a. Montrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique.  
On précisera son premier terme et sa raison.
    - b. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$  non nul :

$$g_n = 0,1 \times 0,5^{n-1} + 0,4.$$

6. Étudier les variations de la suite  $(g_n)$ .
7. Donner, en justifiant, la limite de la suite  $(g_n)$ .  
Interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.
8. Déterminer, par le calcul, le plus petit entier  $n$  tel que  $g_n - 0,4 \leq 0,001$ .
9. Recopier et compléter les lignes 4, 5 et 6 de la fonction suivante, écrite en langage Python, afin qu'elle renvoie le plus petit rang à partir duquel les termes de la suite  $(g_n)$  sont tous inférieurs ou égaux à  $0,4 + e$ , où  $e$  est un nombre réel strictement positif.

```

1  def seuil(e) :
2      g = 0.5
3      n = 1
4      while ... :
5          g = 0.5 * g + 0.2
6          n = ...
7      return (n)
  
```

## EXERCICE 3

**4 points**

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

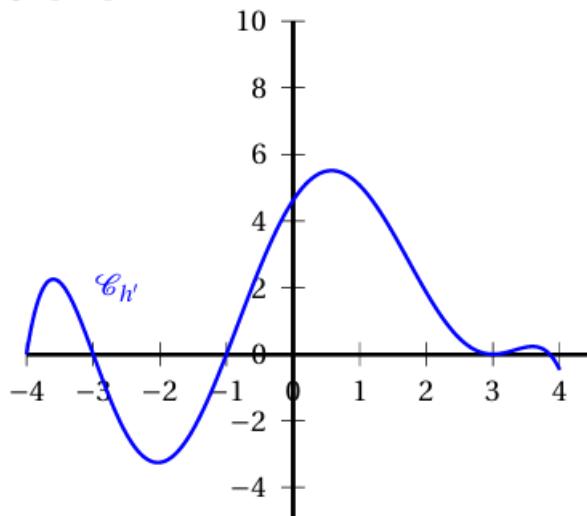
1. Soit  $(u_n)$  une suite définie pour tout entier naturel  $n$  et vérifiant la relation suivante :

$$\text{pour tout entier naturel } n, \frac{1}{2} < u_n \leq \frac{3n^2 + 4n + 7}{6n^2 + 1}.$$

**Affirmation 1**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$ .

2. Soit  $h$  une fonction définie et dérivable sur l'intervalle  $[-4 ; 4]$ .

La représentation graphique  $\mathcal{C}_{h'}$  de sa fonction dérivée  $h'$  est donnée ci-dessous.



**Affirmation 2 :** La fonction  $h$  est convexe sur  $[-1 ; 3]$ .

3. Le code d'un immeuble est composé de 4 chiffres (qui peuvent être identiques) suivis de deux lettres distinctes parmi A, B et C (exemple : 1232BA).

**Affirmation 3 :** Il existe 20 634 codes qui contiennent au moins un 0.

4. On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $f(x) = x \ln x$ .

**Affirmation 4 :** La fonction  $f$  est une solution sur  $]0 ; +\infty[$  de l'équation différentielle

$$xy' - y = x.$$

## EXERCICE 4

**5 points**

Dans un repère orthonormé  $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de l'espace, on considère le plan  $(P)$  d'équation :

$$(P) : 2x + 2y - 3z + 1 = 0.$$

On considère les trois points A, B et C de coordonnées :

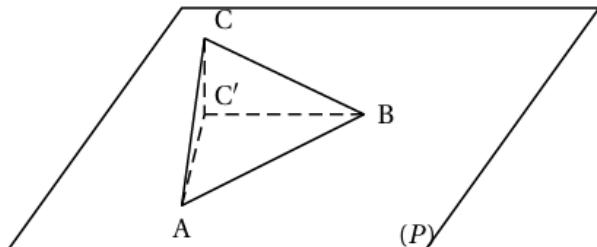
$$A(1; 0; 1), B(2; -1; 1) \text{ et } C(-4; -6; 5).$$

Le but de cet exercice est d'étudier le rapport des aires entre un triangle et son projeté orthogonal dans un plan.

### Partie A

1. Pour chacun des points A, B et C, vérifier s'il appartient au plan  $(P)$ .
  2. Montrer que le point  $C'(0; -2; -1)$  est le projeté orthogonal du point C sur le plan  $(P)$ .
  3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).
  4. On admet l'existence d'un unique point H vérifiant les deux conditions
- $$\begin{cases} H \in (AB) \\ (AB) \text{ et } (HC) \text{ sont orthogonales.} \end{cases}$$

Déterminer les coordonnées du point H.



### Partie B

On admet que les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{HC}$  sont :  $\overrightarrow{HC} \begin{pmatrix} -\frac{11}{2} \\ -\frac{11}{2} \\ 4 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer la valeur exacte de  $\|\overrightarrow{HC}\|$ .
2. Soit  $S$  l'aire du triangle ABC. Déterminer la valeur exacte de  $S$ .

### Partie C

On admet que  $HC' = \sqrt{\frac{17}{2}}$ .

1. Soit  $\alpha = \widehat{CHC'}$ . Déterminer la valeur de  $\cos(\alpha)$ .
2. a. Montrer que les droites  $(C'H)$  et  $(AB)$  sont perpendiculaires.  
b. Calculer  $S'$  l'aire du triangle  $ABC'$ , on donnera la valeur exacte.  
c. Donner une relation entre  $S, S'$  et  $\cos(\alpha)$ .