EXERCICES – CALCUL D'INTÉGRAL – CALCUL D'AIRES : exercices du BAC

Exercice 1

Exercice 4 — 5 points

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

et on appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. On définit la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$.
   - **a.** Montrer que $g'(x) = f(x)$ pour tout x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   - **b.** Pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, calculer $f'(x)$ et montrer que :

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)}{4x\sqrt{x}}.$$

2. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en 0.
   - **b.** Interpréter graphiquement ce résultat.
3. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   - **b.** Étudier le sens de variation de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$.
     Dresser le tableau de variations de la fonction f en y faisant figurer les limites aux bornes de l'intervalle de définition.
   - **c.** Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$ et donner une valeur approchée à 10^{-1} près de cette solution.
4. On pose $I = \displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.
   - **a.** Calculer I.
   - **b.** Interpréter graphiquement le résultat.

IMPI SCHOOL
L'excellence par l'apprentissage

Exercice 2

On considère la fonction f définie pour tout nombre réel x par :

$$f(x) = \left(x^2 + 3x + 2\right) \mathrm{e}^{-x}$$

1. Démontrer que la limite de la fonction f en $+\infty$ est égale à 0.
   On admet par ailleurs que la limite de la fonction f en $-\infty$ est égale à $+\infty$.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.
   a. Vérifier que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = \left(-x^2 - x + 1\right) \mathrm{e}^{-x}$.
   b. Déterminer le signe de la fonction dérivée f' sur $\mathbb{R}$ puis en déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. Expliquer pourquoi la fonction f est positive sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
4. On notera $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\right)$. On admet que la fonction F définie pour tout nombre réel x par $F(x) = \left(-x^2 - 5x - 7\right) \mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de la fonction f.
   Soit α un nombre réel positif.
   Déterminer l'aire $\mathscr{A}(\alpha)$, exprimée en unité d'aire, du domaine du plan délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \alpha$.

IMPI SCHOOL
L'excellence par l'apprentissage

Exercice 3

EXERCICE 1 **5 points**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x} + 2x - 1.$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
On appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' la fonction dérivée seconde de f, c'est-à-dire la fonction dérivée de la fonction f'.

Partie A : Étude de la fonction f

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Pour tout réel x, calculer $f'(x)$.
3. Montrer que pour tout réel x :

$$f''(x) = (x-2)\mathrm{e}^{-x}$$

4. Étudier la convexité de la fonction f.
5. Étudier les variations de la fonction f' sur $\mathbb{R}$, puis dresser son tableau de variations en y faisant apparaître la valeur exacte de l'extremum.
   Les limites de la fonction f' aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.
6. En déduire le signe de la fonction f' sur $\mathbb{R}$, puis justifier que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
7. Justifier qu'il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0$.
   Donner un encadrement de α, au centième près.
8. On considère la droite Δ d'équation $y = 2x - 1$.
   Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite Δ.

Partie B : Calcul d'aire

Soit n un entier naturel non nul. On considère l'aire du domaine D_n délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, la droite Δ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = n$. On note

$$I_n = \int_1^n x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

1. À l'aide d'une intégration par parties, exprimer I_n en fonction de n.
2. **a.** Justifier que l'aire du domaine D_n est I_n.
   b. Calculer la limite de l'aire du domaine D_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 4

EXERCICE 4 **6 points**

Partie A : étude de la fonction f

La fonction f est définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = x - 2 + \dfrac{1}{2}\ln x$, où ln désigne la fonction logarithme népérien. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, on note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1. **a.** Déterminer, en justifiant, les limites de f en 0 et en $+\infty$.
   b. Montrer que pour tout x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$, on a : $f'(x) = \dfrac{2x+1}{2x}$.
   c. Étudier le sens de variation de f sur $]0\,;\,+\infty[$.
   d. Étudier la convexité de f sur $]0\,;\,+\infty[$.
2. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0\,;\,+\infty[$ une solution unique qu'on notera α et justifier que α appartient à l'intervalle $[1\,;\,2]$.
   b. Déterminer le signe de $f(x)$ pour $x \in]0\,;\,+\infty[$.

   c. Montrer que $\ln(\alpha) = 2(2-\alpha)$.

Partie B : étude de la fonction g.

La fonction g est définie sur $]0\,;\,1]$ par : $g(x) = -\dfrac{7}{8}x^2 + x - \dfrac{1}{4}x^2\ln x$.
On admet que la fonction g est dérivable sur $]0\,;\,1]$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. Calculer $g'(x)$ pour $x \in]0\,;\,1]$ puis vérifier que $g'(x) = xf\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
2. **a.** Justifier que pour x appartenant à l'intervalle $\left]0\,;\,\dfrac{1}{\alpha}\right[$, on a $f\left(\dfrac{1}{x}\right) > 0$.
   b. On admet le tableau de signes suivant :

x	0		$\frac{1}{\alpha}$		1
Signe de $f\left(\frac{1}{x}\right)$	‖	$+$	0	$-$	

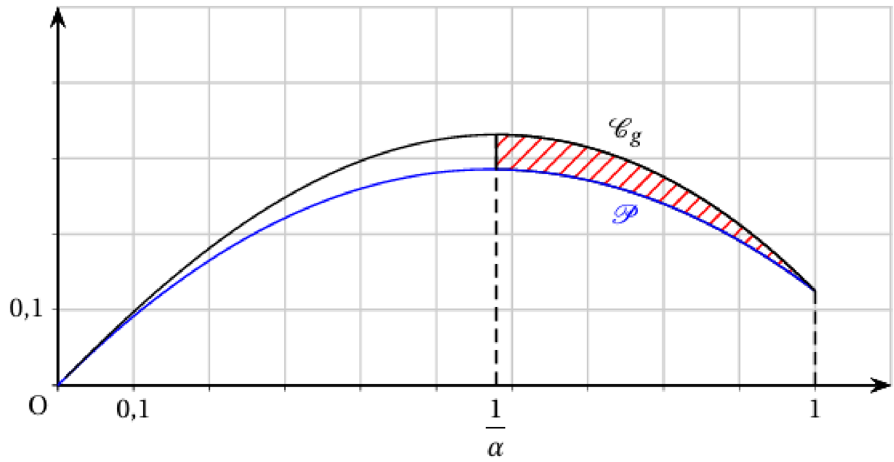
   En déduire le tableau de variations de g sur l'intervalle $]0\,;\,1]$. Les images et les limites ne sont pas demandées.

Partie C : un calcul d'aire.

On a représenté sur le graphique ci-dessous :

— La courbe $\mathscr{C}_g$ de la fonction g ;

— La parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = -\frac{7}{8}x^2 + x$ sur l'intervalle $]0 ; 1]$.



On souhaite calculer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine hachuré compris entre les courbes $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{P}$, et les droites d'équations $x = \frac{1}{\alpha}$ et $x = 1$.

On rappelle que $\ln(\alpha) = 2(2-\alpha)$.

1. **a.** Justifier la position relative des courbes C_g et $\mathscr{P}$ sur l'intervalle $]0 ; 1]$.

   b. Démontrer l'égalité :

$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2 \ln x \mathrm{d}x = \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}$$

2. En déduire l'expression en fonction de α de l'aire $\mathscr{A}$.