EXERCICES – CONVEXITÉ DES FONCTIONS : exercices du BAC

Exercice 1

EXERCICE 1 **5 points**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x} + 2x - 1.$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
On appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' la fonction dérivée seconde de f, c'est-à-dire la fonction dérivée de la fonction f'.

Partie A : Étude de la fonction f

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Pour tout réel x, calculer $f'(x)$.
3. Montrer que pour tout réel x :

$$f''(x) = (x-2)\,\mathrm{e}^{-x}$$

4. Étudier la convexité de la fonction f.
5. Étudier les variations de la fonction f' sur $\mathbb{R}$, puis dresser son tableau de variations en y faisant apparaître la valeur exacte de l'extremum.
   Les limites de la fonction f' aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.
6. En déduire le signe de la fonction f' sur $\mathbb{R}$, puis justifier que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
7. Justifier qu'il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0$.
   Donner un encadrement de α, au centième près.
8. On considère la droite Δ d'équation $y = 2x - 1$.
   Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite Δ.

Exercice 2

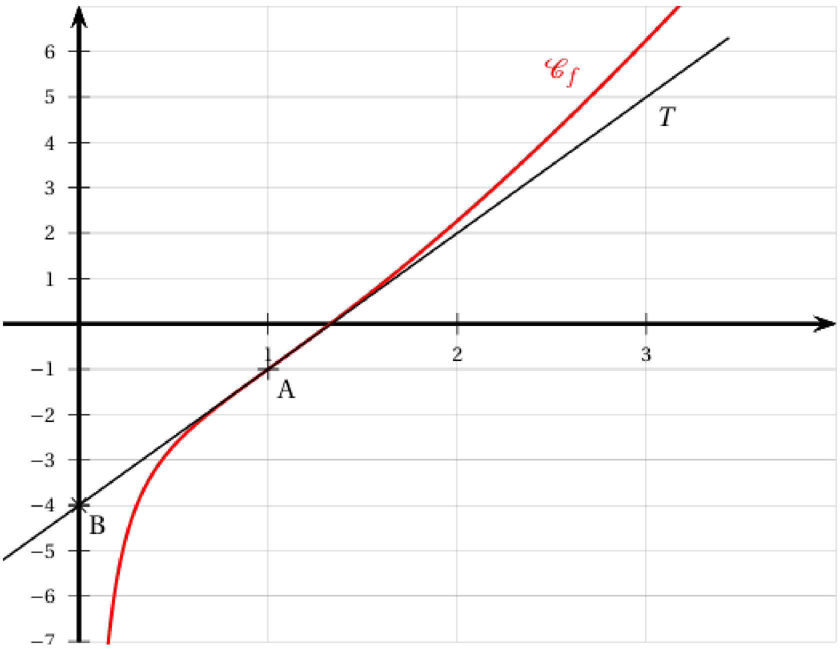
EXERCICE 3 **5 points**

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln\left(x^2\right) - \frac{1}{x}.$$

Partie A : lectures graphiques

On a tracé ci-dessous la courbe représentative $(\mathscr{C}_f)$ de la fonction f, ainsi que la droite (T), tangente à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au point A de coordonnées $(1\ ;\ -1)$.
Cette tangente passe également par le point $\mathrm{B}(0\ ;\ -4)$.



1. Lire graphiquement $f'(1)$ et donner l'équation réduite de la tangente (T).
2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble convexe ou concave. Que semble représenter le point A pour la courbe $(\mathscr{C}_f)$?

Partie B : étude analytique

1. Déterminer, en justifiant, la limite de f en $+\infty$, puis sa limite en 0.
2. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   a. Déterminer $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   b. Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$,

$$f''(x) = \frac{2(x+1)(x-1)}{x^3}.$$

3. a. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Exercice 3

EXERCICE 2 **6 points**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$ par

$$f(x)=\frac{\mathrm{e}^{x}}{x-1}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$.
On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en 1.
   b. En déduire une interprétation graphique.
2. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
3. **a.** Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$, on a

$$f'(x)=\frac{(x-2)\,\mathrm{e}^{x}}{(x-1)^{2}}.$$

   b. Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$.
4. On admet que pour tout réel x de l'intervalle $]]-\infty\,;\,1[$, on a

$$f''(x)=\frac{\left(x^{2}-4x+5\right)\mathrm{e}^{x}}{(x-1)^{3}}.$$

   a. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$.
   b. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
   c. En déduire que, pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$, on a :

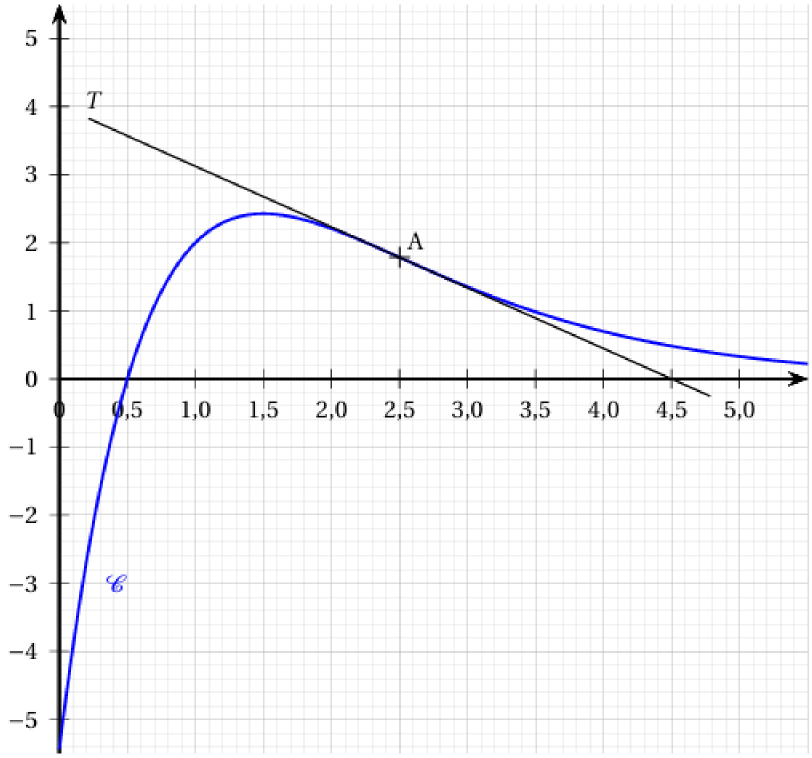
$$\mathrm{e}^{x}\geqslant(-2x-1)(x-1).$$

5. **a.** Justifier que l'équation $f(x)=-2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$.
   b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

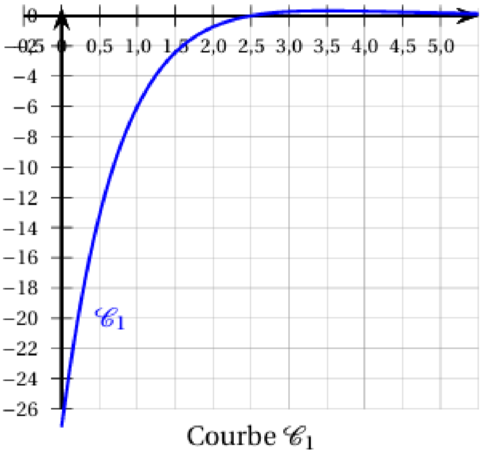
EXERCICE 1 **5 points**

Partie A

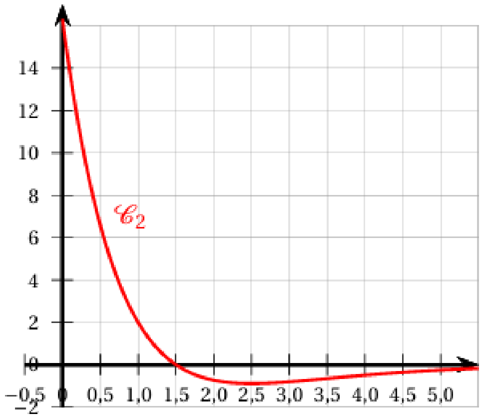
On considère une fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$, représentée par la courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous.
La droite T est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse $\dfrac{5}{2}$.



1. Dresser, par lecture graphique, le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;5]$.
2. Que semble présenter la courbe $\mathscr{C}$ au point A ?
3. La dérivée f' et la dérivée seconde f'' de la fonction f sont représentées par les courbes ci-dessous.
   Associer à chacune de ces deux fonctions la courbe qui la représente.
   Ce choix sera justifié.

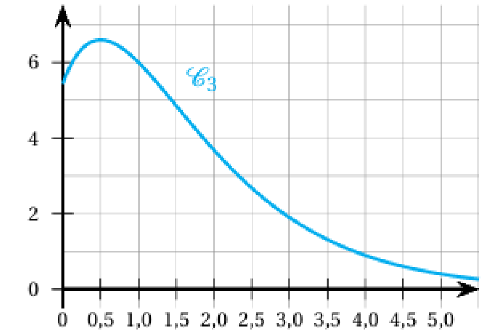


Courbe $\mathscr{C}_1$



Courbe $\mathscr{C}_2$

4. La courbe $\mathscr{C}_3$ ci-contre peut-elle être la représentation graphique sur $[0\ ;\ +\infty[$ d'une primitive de la fonction f ? Justifier.



Partie B

Dans cette partie, on considère que la fonction f, définie et deux fois dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$, est définie par

$$f(x) = (4x-2)\,\mathrm{e}^{-x+1}.$$

On notera respectivement f' et f'' la dérivée et la dérivée seconde de la fonction f.

1. Étude de la fonction f

   a. Montrer que $f'(x) = (-4x+6)\,\mathrm{e}^{-x+1}$.

   b. Utiliser ce résultat pour déterminer le tableau complet des variations de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$. On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

   c. Étudier la convexité de la fonction f et préciser l'abscisse d'un éventuel point d'inflexion de la courbe représentative de f.

Exercice 5

Exercice 4 5 points

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

et on appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. On définit la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x)=\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$.
   - **a.** Montrer que $g'(x)=f(x)$ pour tout x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   - **b.** Pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, calculer $f'(x)$ et montrer que :

$$f'(x)=\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)}{4x\sqrt{x}}.$$

2. - **a.** Déterminer la limite de la fonction f en 0.
   - **b.** Interpréter graphiquement ce résultat.
3. - **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   - **b.** Étudier le sens de variation de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$.

     Dresser le tableau de variations de la fonction f en y faisant figurer les limites aux bornes de l'intervalle de définition.
   - **c.** Montrer que l'équation $f(x)=2$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$ et donner une valeur approchée à 10^{-1} près de cette solution.
4. On pose $I=\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.
   - **a.** Calculer I.
   - **b.** Interpréter graphiquement le résultat.
5. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et que :

$$f''(x)=\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\left(x-3\sqrt{x}+3\right)}{8x^2\sqrt{x}}.$$

   - **a.** En posant $X=\sqrt{x}$, montrer que $x-3\sqrt{x}+3>0$ pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   - **b.** Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.