

EXERCICES – CONVEXITÉ DES FONCTIONS

Exercice 1

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$f(x) = x^3 + 2x - \frac{2}{x}$$

$$g(x) = \frac{2x+1}{x+2}$$

$$h(x) = xe^x$$

$$k(x) = (x+1)e^{-2x+1}$$

Exercice 2

Calculer la dérivée f' puis la dérivée seconde $f'' = (f')'$ des fonctions suivantes :

$$a) f(x) = 3x^2 - \frac{1}{2}x^2 + 3$$

$$b) f(x) = e^{2x+1}$$

$$c) f(x) = e^{-x^2}$$

$$d) f(x) = \frac{e^x}{x}$$

Exercice 3

Soit f la fonction exponentielle.

1. Donner la convexité de f .
2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.
3. En déduire que, pour tout réel x , $e^x > x$.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x^2 + 0,5x + 1$.

1. Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les abscisses des éventuels points d'inflexion de la courbe de f .

Exercice 5

Même exercice avec la fonction $g(x) = xe^x$, puis avec la fonction $h(x) = e^{-x^2}$.

Exercice 6

QCM Indiquer les bonnes réponses (une ou plusieurs par question).

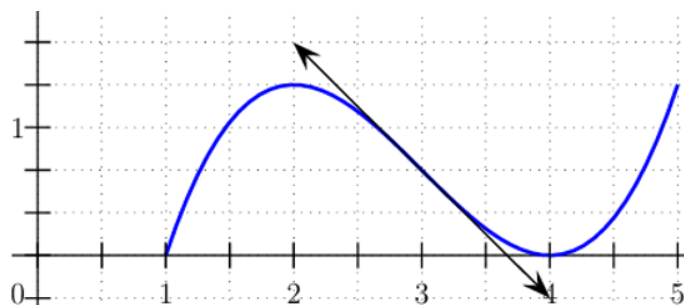
1. La fonction dérivée de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (2x^2 + 4x + 6)e^{5x+7}$ est $h'(x) =$:
 - a) $(2x^2 + 4x + 6)e^{5x+7} + (4x + 4)e^{5x+7}$
 - b) $2(5x^2 + 12x + 17)e^{5x+7}$
 - c) $5e^{5x+7}(2x^2 + 4x + 6) + e^{5x+7}(4x + 4)$
 - d) $5e^{5x+7}(4x + 4)$
2. La fonction k définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ est :
 - a) croissante sur $\mathbb{R}$
 - b) croissante sur $[0; +\infty[$
 - c) convexe sur $[0; +\infty[$
 - d) convexe sur $\mathbb{R}$.
3. La fonction l définie sur $\mathbb{R}$ par $l(x) = (x^2 - 5x + 4)^2$ admet
 - a) un point d'inflexion
 - b) deux points d'inflexion
 - c) trois points d'inflexion
 - d) quatre points d'inflexion
4. La fonction m définie sur $\mathbb{R}$ par $m(x) = e^{x^2-2x+3}$:
 - a) admet pour dérivée $m' : x \mapsto 2(x-1)m(x)$
 - b) admet pour dérivée $m' : x \mapsto e^{2x-2}$
 - c) est concave sur $\mathbb{R}$
 - d) est convexe sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7

On considère la fonction g définie sur $[1; 5]$ dont la courbe représentative est tracée ci-contre.

1. Que vaut $g'(3)$?

- a) $g'(3) = -3$ b) $g'(3) = -1$
c) $g'(3) = \frac{3}{2}$ d) $g'(3) = -\frac{3}{2}$

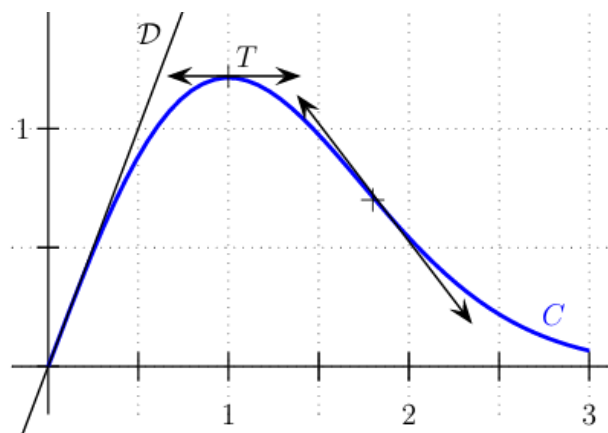


2. $g'(x) = 0$ pour : a) $x = 1$ b) $x = 2$ c) $x = 3$ d) $x = 4$
3. La fonction g semble convexe sur : a) $[2; 4]$ b) $[1; 3]$ c) $[1; 2]$ d) $[3; 5]$
4. g'' étant la dérivée de g' , on a : a) $g''(3) = 3$ b) $g''(2) = 0$ c) $g''(3) = 0$ d) $g''(4) = 0$
5. $g' \geq 0$ sur : a) $[1; 5]$ b) $[1; 2] \cup [4; 5]$ c) $[2; 4]$ d) $[2; 3] \cup [3; 4]$

Exercice 8

On donne ci-contre la courbe C représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $[0; 3]$. La droite $\mathcal{D}$ est tangente à C au point d'abscisse 0 et passe par le point $A(0, 5; 1)$ et par l'origine du repère.

La tangente T à la courbe C au point d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.



Partie A

- Déterminer une équation de $\mathcal{D}$.
- Donner la valeur de $f'(1)$. Justifier.
- Proposer un intervalle sur lequel f semble concave.

Partie B La fonction f est définie sur $[0; 3]$ par l'expression $f(x) = 2xe^{-0,5x^2}$.

- Montrer que, pour tout $x \in [0; 3]$, $f'(x) = (2 - 2x^2)e^{-0,5x^2}$.
- Étudier les variations de f sur $[0; 3]$.
- Déterminer la dérivée seconde de f et étudier sa convexité.

Exercice 9

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $g(x) = \frac{e^x}{1-x}$.

- Déterminer $g'(x)$, puis montrer que g'' a pour expression $g''(x) = \frac{e^x(x^2 - 4x + 5)}{(1-x)^3}$.
- En déduire la convexité de g et les abscisses des éventuels points d'inflexion.
- Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse 0.
- Montrer que, pour tout $x > 1$, on a $e^x \geq -2x^2 + 3x - 1$.