EXERCICES – ÉTUDE DES FONCTIONS

Exercice 1

On considère la fonction $\boldsymbol{f}$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\boldsymbol{f(x) = x^3 + x^2 - x}$.

On appelle $\boldsymbol{C_f}$ sa courbe représentative. Le but de cet exercices est de déterminer la position relative de la courbe représentative $\boldsymbol{C_f}$ par rapport à sa tangente $\boldsymbol{T_1}$ au point d'abscisse $\mathbf{1}$.

1) Justifiez que la fonction est dérivable et déterminez $\boldsymbol{f'(x)}$.
2) Établir les variations de $\boldsymbol{f}$ sur $[-7\ ;\ 7]$. (On fera un tableau des variations complet de $\boldsymbol{f}$)
3) Déterminer l'équation de la tangente $\boldsymbol{T_1}$ à $\boldsymbol{C_f}$ au point d'abscisse $\boldsymbol{a = 1}$.
4) On considère la fonction $\boldsymbol{g}$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\boldsymbol{g(x) = f(x) - (4x - 3)}$.
   a) Étudiez les variations de $\boldsymbol{g}$ et dressez son tableau des variations sur $[-7\ ;\ 7]$.
   b) Calculez $\boldsymbol{g(-3)}$. Placez -3 et $\boldsymbol{g(-3)}$ dans tableau des variations.
   c) Déduisez en le signe de $\boldsymbol{g(x)}$ suivant les valeurs de $\boldsymbol{x}$ et concluez.

Exercice 2

On considère deux fonctions $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{g}$.

la fonction $\boldsymbol{f}$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\boldsymbol{f(x) = -x^2 + 7x - 4}$.

la fonction $\boldsymbol{g}$ définie sur $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$ par : $\boldsymbol{g(x) = \frac{x+4}{x-1}}$.

On appelle $\boldsymbol{C_f}$ et $\boldsymbol{C_g}$ leurs courbes représentatives dans un repère orthonormé.

1) Utilisez la calculatrice pour conjecturer leur position relative.
2) Dressez en justifiant le tableau des variations de la fonction $\boldsymbol{f}$.
3) Justifiez que la fonction est dérivable et déterminez $\boldsymbol{g'(x)}$.
4) Dressez le tableau des variations de fonction $\boldsymbol{g}$.
5) Déterminez la différence $\boldsymbol{f(x) - g(x)}$.
6) Etudiez le signe de la différence $\boldsymbol{f(x) - g(x)}$.
7) Déduisez-en la position relative des courbes $\boldsymbol{C_f}$ et $\boldsymbol{C_g}$.

Exercice 3

Une entreprise souhaite fabriquer une boite parallélépipédique à base carrée de $\mathbf{128}\ \boldsymbol{cm^3}$ de volume.

Le fond et le couvercle lui reviennent à $\mathbf{0,004}$€ le $\boldsymbol{cm^2}$, les faces latérales à $\mathbf{0,002}$€ le $\boldsymbol{cm^2}$.

En centimètres, on désigne par $\boldsymbol{x}$ le côté de la base et par $\boldsymbol{h}$ la hauteur, exprimés en centimètres.

1) Exprimez $\boldsymbol{h}$ en fonction de $\boldsymbol{x}$.
2) Déduisez-en que le prix de revient est, en centimes d'euros égale à : $\boldsymbol{p(x) = 8x^2 + \frac{1024}{x}}$
3) Justifiez que la fonction est dérivable et déterminez $\boldsymbol{p'(x)}$.
4) Etudiez les variations de $\boldsymbol{p}$.
5) Pour quelles dimensions le prix de revient est-il minimal ?

Exercice 4

Une entreprise fabrique et vend un produit imperméable pour vêtements et équipements de randonnée.

La quantité hebdomadaire produite $\boldsymbol{x}$ ($\boldsymbol{en\ litres}$) varie entre $\mathbf{0}$ et $\mathbf{1000}$.

Le coût de fabrication, en euros, de $\boldsymbol{x}$ litres est donné par : $\boldsymbol{C(x) = \frac{x^2}{1000} - \frac{x^2}{20} + 40x + 5000}$.

La recette en euros est donnée par $\boldsymbol{R(x) = -0,2x^2 + 6407x}$

1) On appelle $\boldsymbol{B(x)}$ le bénéfice réalisé par l'entreprise lorsqu'elle fabrique et vend $\boldsymbol{x\ litres}$ de produit.

   Exprimez $\boldsymbol{B(x)}$ en fonction de $\boldsymbol{x}$.

2) Etudiez les variations de $\boldsymbol{B}$ sur $[\mathbf{0}\ ;\ \mathbf{1000}]$.
3) Pour quelles quantités fabriquées par l'entreprise le bénéfice est-il maximal ?
4) Quel est alors ce bénéfice ?