EXERCICES – ÉQUATION DIFFÉRENTIELLES : exercices du BAC

Exercice 1

EXERCICE 4 **5 points**

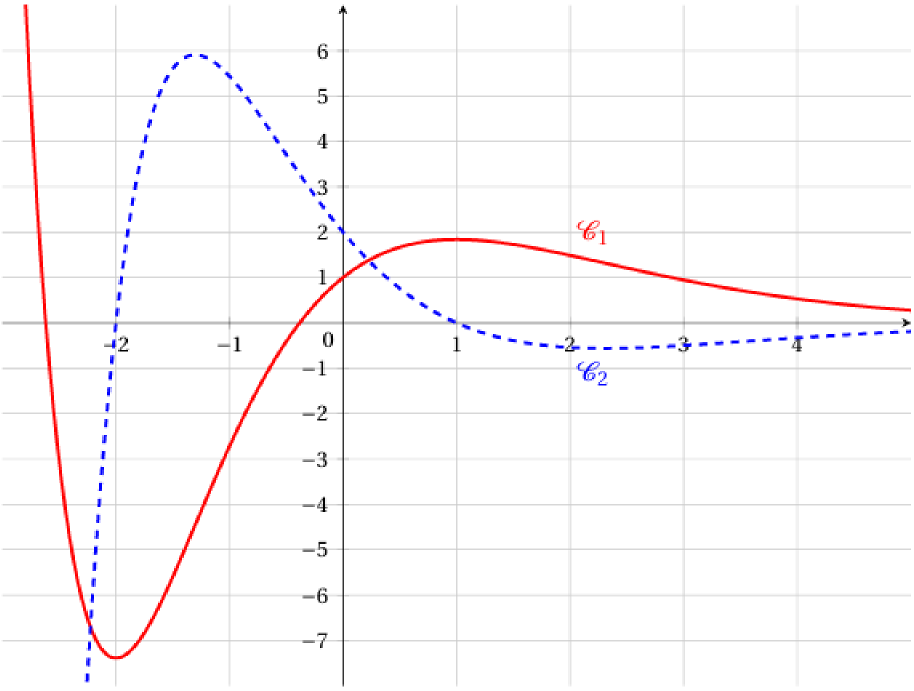
La **partie C** est indépendante des parties **A** et **B**.

Partie A

On donne ci-dessous, dans un repère orthogonal, les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$, représentations graphiques de deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. L'une des deux fonctions représentées est la fonction dérivée de l'autre. On les notera g et g'.
On précise également que :

— La courbe $\mathscr{C}_1$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0\,;\,1)$.

— La courbe $\mathscr{C}_2$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0\,;\,2)$ et l'axe des abscisses aux points de coordonnées $(-2\,;\,0)$ et $(1\,;\,0)$.



1. En justifiant, associer à chacune des fonctions g et g' sa représentation graphique.
2. Justifier que l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse 0 est $y = 2x + 1$.

Partie B

On considère (E) l'équation différentielle

$$y + y' = (2x+3)\,\mathrm{e}^{-x},$$

où y est une fonction de la variable réelle x.

1. Montrer que la fonction f_0 définie pour tout nombre réel x par $f_0(x) = \left(x^2+3x\right)\mathrm{e}^{-x}$ est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
2. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y + y' = 0$.
3. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E).
4. On admet que la fonction g décrite dans la **partie A** est une solution de l'équation différentielle (E).
   Déterminer alors l'expression de la fonction g.
5. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E) dont la courbe admet exactement deux points d'inflexion.

Partie C

On considère la fonction f définie pour tout nombre réel x par :

$$f(x) = \left(x^2+3x+2\right)\mathrm{e}^{-x}$$

1. Démontrer que la limite de la fonction f en $+\infty$ est égale à 0.
   On admet par ailleurs que la limite de la fonction f en $-\infty$ est égale à $+\infty$.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.
   a. Vérifier que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = \left(-x^2-x+1\right)\mathrm{e}^{-x}$.
   b. Déterminer le signe de la fonction dérivée f' sur $\mathbb{R}$ puis en déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. Expliquer pourquoi la fonction f est positive sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
4. On notera $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$. On admet que la fonction F définie pour tout nombre réel x par $F(x) = \left(-x^2-5x-7\right)\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de la fonction f.
   Soit α un nombre réel positif.
   Déterminer l'aire $\mathscr{A}(\alpha)$, exprimée en unité d'aire, du domaine du plan délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équation $x=0$ et $x=\alpha$.

Exercice 2

Exercice 4 — 4 points

Partie A

On considère l'équation différentielle

$$(E_1): \quad y' + 0{,}48y = \frac{1}{250},$$

où y est une fonction de la variable t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

1. On considère la fonction constante h définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $h(t) = \dfrac{1}{120}$.
   Montrer que la fonction h est solution de l'équation différentielle (E_1).
2. Donner la forme générale des solutions de l'équation différentielle $y' + 0{,}48y = 0$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E_1).

Partie B

On s'intéresse à présent à l'évolution d'une population de bactéries dans un milieu de culture.
À un instant $t = 0$, on introduit une population initiale de 30 000 bactéries dans le milieu.
On note $p(t)$ la quantité de bactéries, exprimée en millier d'individus, présente dans le milieu après un temps t, exprimé en heure.
On a donc $p(0) = 30$.
On admet que la fonction p définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ est dérivable, strictement positive sur cet intervalle et qu'elle est solution de l'équation différentielle (E_2) :

$$p' = \frac{1}{250}p \times (120 - p)$$

Soit y la fonction strictement positive sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ telle que, pour tout t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, on a $p(t) = \dfrac{1}{y(t)}$.

1. Montrer que si p est solution de l'équation différentielle (E_2), alors y est solution de l'équation différentielle (E_1) : $\quad y' + 0{,}48y = \dfrac{1}{250}$.
2. On admet réciproquement que, si y est une solution strictement positive de l'équation différentielle (E_1), alors $p = \dfrac{1}{y}$ est solution de l'équation différentielle (E_2).
   Montrer que, pour tout t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, on a :
   $$p(t) = \frac{120}{1 + K\,\mathrm{e}^{-0{,}48t}} \text{ avec } K \text{ une constante réelle.}$$
3. En utilisant la condition initiale, déterminer la valeur de K.
4. Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} p(t)$. En donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.
5. Déterminer le temps nécessaire pour que la population de bactéries dépasse 60 000 individus.
   On donnera le résultat sous la forme d'une valeur arrondie exprimée en heures et minutes.

Exercice 3

EXERCICE 4 **5 points**

Dans un laboratoire, on étudie une réaction chimique dans un réacteur fermé, sous certaines conditions. Le traitement numérique des données expérimentales a permis de modéliser l'évolution de la température de cette réaction chimique en fonction du temps.

L'objectif de cet exercice est d'étudier cette modélisation.

La température est exprimée en degré Celsius et le temps est exprimé en minute.

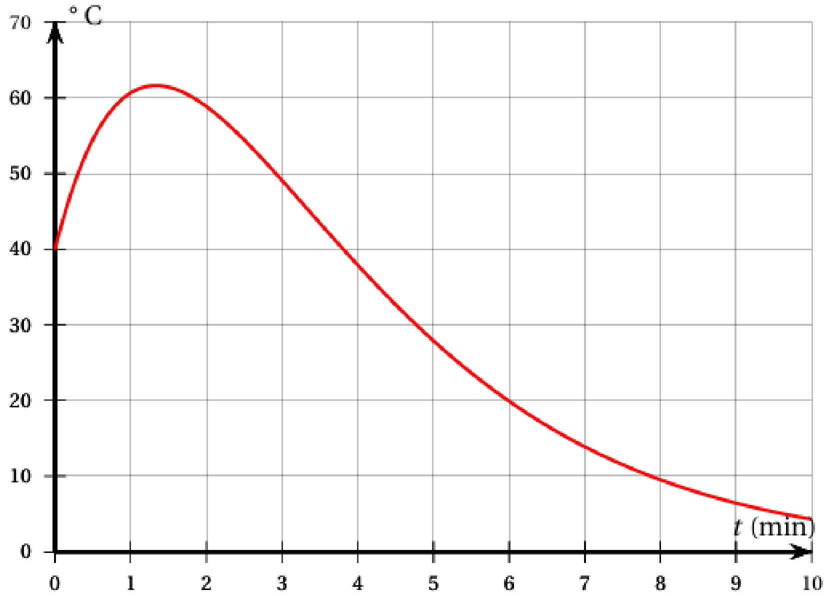
Dans tout l'exercice, on se place sur l'intervalle de temps $[0\,;\,10]$.

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

Dans un repère orthogonal du plan, on donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction température en fonction du temps sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.

1. Déterminer, par lecture graphique, au bout de combien de temps la température redescend à sa valeur initiale à l'instant $t = 0$.



On appelle f la fonction température représentée par la courbe ci-dessus.

On précise que la fonction f est définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.

On admet que la fonction f peut s'écrire sous la forme $f(t) = (at+b)\,\mathrm{e}^{-0,5t}$ où a et b sont deux constantes réelles.

2. On admet que la valeur exacte de $f(0)$ est 40. En déduire la valeur de b.
3. On admet que f vérifie l'équation différentielle (E) : $y' + 0,5y = 60\,\mathrm{e}^{-0,5t}$. Déterminer la valeur de a.

Partie B : Étude de la fonction f

On admet que la fonction f est définie pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;\,10]$ par

$$f(t) = (60t + 40)\,\mathrm{e}^{-0,5t}$$

1. Montrer que pour tout réel t de l'intervalle $[0;10]$, on a : $f'(t) = (40 - 30t)\,\mathrm{e}^{-0,5t}$.
2. **a.** Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,0]$.
   Dresser le tableau de variations de la fonction f en y faisant figurer les images des valeurs présentes dans le tableau.
   b. Montrer que l'équation $f(t) = 40$ admet une unique solution α strictement positive sur l'intervalle $]0\,;\,10]$.
   c. Donner une valeur approchée de α au dixième près et en donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.
3. On définit la température moyenne, exprimée en degré Celsius, de cette réaction chimique entre deux temps t_1 et t_2, exprimés en minute, par

$$\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,\mathrm{d}t$$

   a. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\int_0^4 f(t)\,\mathrm{d}t = 320 - \frac{800}{\mathrm{e}^2}$$

   b. En déduire une valeur approchée, au degré Celsius près, de la température moyenne de cette réaction chimique au cours des 4 premières minutes.moyenne