# EXERCICES – FONCTIONS EXPONENTIELLES

## Exercice 1

**EXERCICE 2** **5 points**

**Commun à tous les candidats**

La vasopressine est une hormone favorisant la réabsorption de l'eau par l'organisme.

Le taux de vasopressine dans le sang est considéré normal s'il est inférieur à 2,5 $\mu$g/mL.
Cette hormone est sécrétée dès que le volume sanguin diminue. En particulier, il y a production de vasopressine suite à une hémorragie.

On utilisera dans la suite la modélisation suivante :

$$f(t) = 3te^{-\frac{1}{4}t} + 2 \text{ avec } t \geqslant 0,$$

où $f(t)$ représente le taux de vasopressine (en $\mu$g/mL) dans le sang en fonction du temps $t$ (en minute) écoulé après le début d'une hémorragie.

1. **a.** Quel est le taux de vasopressine dans le sang à l'instant $t = 0$ ?
   **b.** Justifier que douze secondes après une hémorragie, le taux de vasopressine dans le sang n'est pas normal.
   **c.** Déterminer la limite de la fonction $f$ en $+\infty$. Interpréter ce résultat.
2. On admet que la fonction $f$ est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$.
   Vérifier que pour tout nombre réel $t$ positif,
   $$f'(t) = \frac{3}{4}(4-t)e^{-\frac{1}{4}t}.$$
3. **a.** Étudier le sens de variation de $f$ sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et dresser le tableau de variations de la fonction $f$ (en incluant la limite en $+\infty$).
   **b.** À quel instant le taux de vasopressine est-il maximal ?
   Quel est alors ce taux ? On en donnera une valeur approchée à $10^{-2}$ près.
4. **a.** Démontrer qu'il existe une unique valeur $t_0$ appartenant à $[0\,;\,4]$ telle que $f(t_0) = 2{,}5$.
   En donner une valeur approchée à $10^{-3}$ près.

   *On admet qu'il existe une unique valeur $t_1$ appartenant à $[4\,;\,+\infty[$ vérifiant $f(t_1) = 2{,}5$.*
   *On donne une valeur approchée de $t_1$ à $10^{-3}$ près : $t_1 \approx 18{,}930$.*

   **b.** Déterminer pendant combien de temps, chez une personne victime d'une hémorragie, le taux de vasopressine reste supérieur à 2,5 $\mu$g/mL dans le sang.
5. Soit $F$ la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $F(t) = -12(t+4)e^{-\frac{1}{4}t} + 2t$.
   **a.** Démontrer que la fonction $F$ est une primitive de la fonction $f$ et en déduire une valeur approchée de $\int_{t_0}^{t_1} f(t)\,dt$ à l'unité près.
   **b.** En déduire une valeur approchée à 0,1 près du taux moyen de vasopressine, lors d'un accident hémorragique durant la période où ce taux est supérieur à 2,5 $\mu$g/mL.

**Exercice 2**

**Exercice 1** **6 points**
**Commun à tous les candidats**

*Les parties* A *et* B *peuvent être abordées de façon indépendante.*
Deux groupes de scientifiques, des spécialistes en environnement et des biologistes, étudient l'évolution d'une population de grenouilles autour d'un étang.

**Partie A - Étude d'un modèle discret d'évolution**

Le groupe de spécialistes en environnement étudie le taux de disponibilité des ressources nécessaires pour le développement de la population de grenouilles autour de l'étang. Ce taux dépend notamment du nombre de grenouilles présentes sur les lieux, de la quantité de nourriture à disposition, de l'espace disponible et de la qualité de l'environnement.
Une étude, menée en 2018 par ce premier groupe de scientifiques, a permis d'estimer le taux de disponibilité des ressources à 0,9 ; cela signifie que 90 % des ressources sont disponibles.
On modélise le taux de disponibilité des ressources par la suite $(T_n)$ qui, à tout entier naturel $n$, associe le taux de disponibilité des ressources $n$ années après 2018. On a ainsi $T_0 = 0{,}9$.
Le modèle choisi est tel que, pour tout entier naturel $n$, on a : $T_{n+1} = T_n - 0{,}1T_n^2$.

1. Certains spécialistes en environnement estiment qu'en 2022, le taux de disponibilité des ressources sera proche de 0,4. Cette affirmation est-elle conforme au modèle ? Pourquoi ?
2. On définit la fonction $f$ sur l'intervalle $[0;1]$ par $f(x) = x - 0{,}1x^2$.
   Ainsi, la suite $(T_n)$ vérifie pour tout entier naturel $n$, $T_{n+1} = f(T_n)$.
   **a.** Étudier les variations de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0;1]$.
   **b.** Montrer que pour tout $n$ entier naturel, on a : $0 \leqslant T_{n+1} \leqslant T_n \leqslant 1$.
   **c.** La suite $(T_n)$ est-elle convergente ? Justifier la réponse.
   **d.** Le groupe de spécialistes en environnement affirme que, selon ce modèle, le taux de disponibilité des ressources peut être inférieur à 0,4 au cours des vingt premières années qui suivent le début de l'étude et qu'il est capable de déterminer en quelle année, ce seuil serait atteint pour la première fois.
   Cette affirmation est-elle conforme au modèle ? Pourquoi ?

**Partie B - Étude d'un modèle continu d'évolution**

Le groupe de biologistes a choisi une autre option et travaille sur le nombre de grenouilles peuplant l'étang. Au 1er janvier 2018, il avait été dénombré 250 grenouilles.
Les biologistes estiment que le nombre de grenouilles présentes autour de l'étang peut être modélisé par la fonction $P$ définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $P(t) = \dfrac{1000}{0{,}4+3{,}6\mathrm{e}^{-0{,}5t}}$ où $t$ est le temps, mesuré en années, écoulé depuis le 1er janvier 2018 (cette fonction découle d'un modèle continu, usuel en biologie, le modèle de Verhulst).

1. Calculer $P'(t)$ où $P'$ est la fonction dérivée de $P$ puis étudier le signe de $P'(t)$ pour $t$ appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
2. Déterminer la limite de la fonction $P$ en $+\infty$ puis dresser le tableau de variation de la fonction $P$ sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
3. Montrer qu'il existe une unique valeur $t_0 \in [0\,;+\infty[$ telle que $P(t_0) = 2000$. Déterminer cette valeur à $10^{-1}$ près.
4. Selon ce modèle, déterminer au cours de quelle année la population de l'étang aura dépassé pour la première fois les 2000 grenouilles.

Exercice 3

## Exercice 3 — 4 points

**Commun à tous les candidats**

Les cinq questions de cet exercice sont indépendantes.
Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.
Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation $(E)$ : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.
   On note A et B les points du plan dont les affixes sont les solutions de $(E)$.
   On note O le point d'affixe 0.
   **Affirmation 1 :** Le triangle OAB est équilatéral.
2. On note $u$ le nombre complexe : $u = \sqrt{3} + \mathrm{i}$ et on note $\overline{u}$ son conjugué.
   **Affirmation 2 :** $u^{2019} + \overline{u}^{2019} = 2^{2019}$
3. Soit $n$ un entier naturel non nul. On considère la fonction $f_n$ définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

   $$f_n(x) = x\,\mathrm{e}^{-nx+1}.$$

   **Affirmation 3 :** Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, la fonction $f_n$ admet un maximum.
4. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \cos(x)\,\mathrm{e}^{-x}$.
   **Affirmation 4 :** La courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote en $+\infty$.
5. Soit $A$ un nombre réel strictement positif.
   On considère l'algorithme ci-contre.
   On suppose que la variable $I$ contient la valeur 15 en fin d'exécution de cet algorithme.
   **Affirmation 5 :** $15\ln(2) \leqslant \ln(A) \leqslant 16\ln(2)$

```
I ← 0
Tant que 2^I ⩽ A
    I ← I + 1
Fin Tant que
```

**Exercice 4**

# Exercice 1 — 6 points

**Commun à tous les candidats**

## Partie A

On considère la fonction $f$ définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

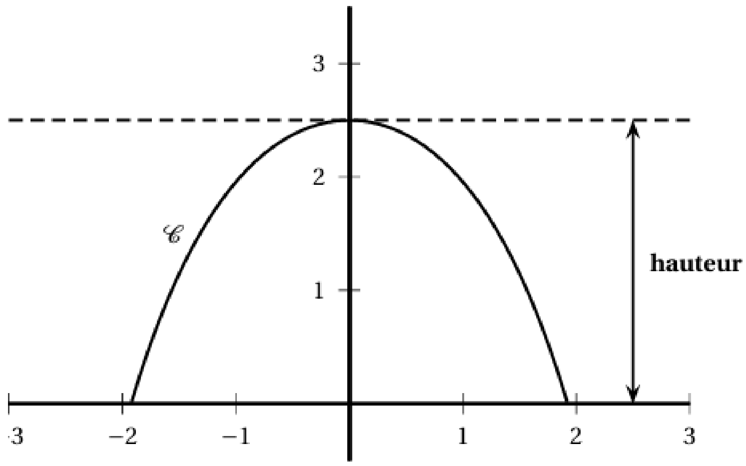
$$f(x) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)$$

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction $f$ en $+\infty$.
   **b.** Montrer que la fonction $f$ est strictement décroissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
   **c.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet, sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, une unique solution, que l'on note $\alpha$.
2. En remarquant que, pour tout réel $x$, $f(-x) = f(x)$, justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$ et qu'elles sont opposées.

## Partie B

Les **serres en forme de tunnel** sont fréquemment utilisées pour la culture des plantes fragiles; elles limitent les effets des intempéries ou des variations de température.
Elles sont construites à partir de plusieurs arceaux métalliques identiques qui sont ancrés au sol et supportent une bâche en plastique.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'unité 1 mètre. La fonction $f$ et le réel $\alpha$ sont définis dans la **partie A**. Dans la suite de l'exercice, on modélise un arceau de serre par la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction $f$ sur l'intervalle $[-\alpha\,;\,+\alpha]$.
On a représenté ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[-\alpha\,;\,+\alpha]$.




On admettra que la courbe $\mathscr{C}$ admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.

1. Calculer la hauteur d'un arceau.
2. **a.** Dans cette question, on se propose de calculer la valeur exacte de la longueur de la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[0\,;\,\alpha]$. On admet que cette longueur est donnée, en mètre, par l'intégrale :

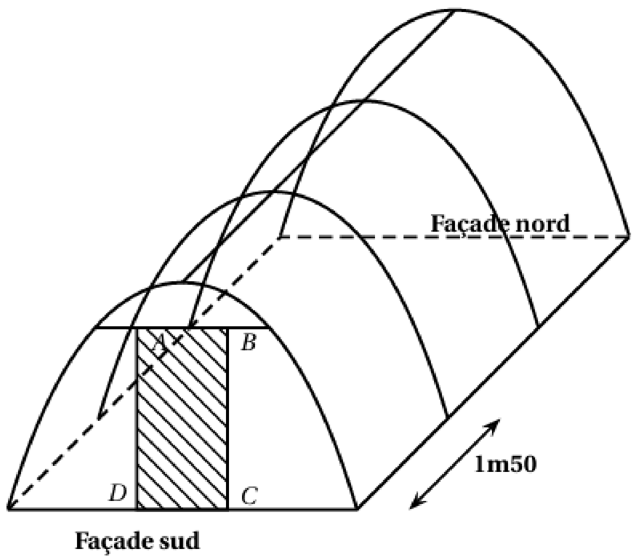
$$I = \int_0^{\alpha} \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx$$

Montrer que, pour tout réel $x$, on a : $1 + \left(f'(x)\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{x} + e^{-x}\right)^2$

**b.** En déduire la valeur de l'intégrale $I$ en fonction de $\alpha$.
Justifier que la longueur d'un arceau, en mètre, est égale à : $e^{\alpha} - e^{-\alpha}$.

## Partie C

On souhaite construire une serre de jardin en forme de tunnel.
On fixe au sol quatre arceaux métalliques, dont la forme est celle décrite dans la partie précédente, espacés de 1,5 mètre, comme indiqué sur le schéma ci-dessous.
Sur la façade sud, on prévoit une ouverture modélisée sur le schéma par le rectangle $ABCD$ de largeur 1 mètre et de longueur 2 mètres.




On souhaite connaître la quantité, exprimée en m$^2$, de bâche plastique nécessaire pour réaliser cette serre.
Cette bâche est constituée de trois parties, l'une recouvrant la façade nord, l'autre la façade sud (sauf l'ouverture), la troisième partie de forme rectangulaire recouvrant le toit de la serre.

1. Montrer que la quantité de bâche nécéssaire pour recouvrir les façades sud et nord est donnée, en m$^2$, par :
$$\mathscr{A} = 4\int_0^{\alpha} f(x)\,dx - 2$$

2. On prend 1,92 pour valeur approchée de $\alpha$. Déterminer, au m$^2$ près, l'aire totale de la bâche plastique nécessaire pour réaliser cette serre.

**Exercice 5**

**EXERCICE 1** **6 points**

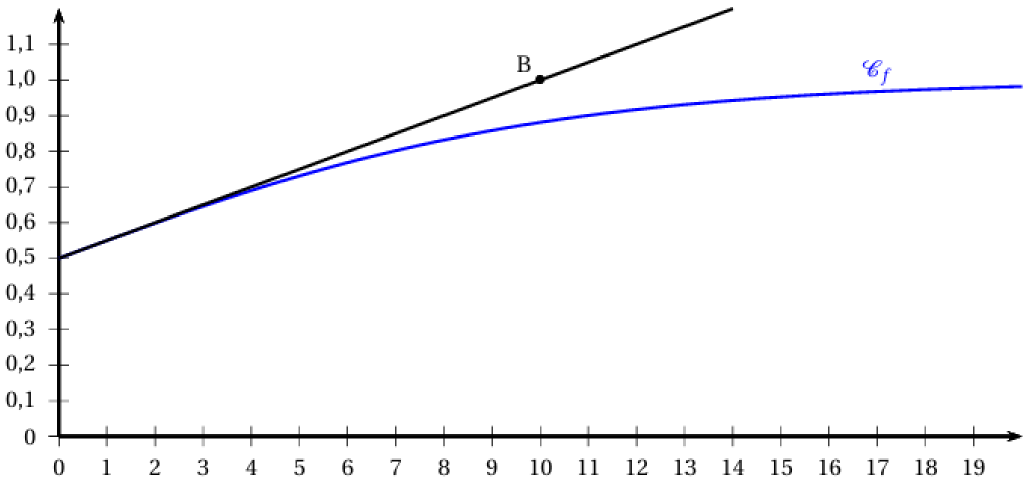
COMMUN À TOUS LES CANDIDATS

**Partie A**

Soit $a$ et $b$ des nombres réels. On considère une fonction $f$ définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{a}{1+\mathrm{e}^{-bx}}.$$

La courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction $f$ dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.
La courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point A$(0\,;\,0{,}5)$. La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A passe par le point B$(10\,;\,1)$.




1. Justifier que $a = 1$.
   On obtient alors, pour tout réel $x \geqslant 0$,
   $$f(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-bx}}.$$
2. On admet que la fonction $f$ est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et on note $f'$ sa fonction dérivée.
   Vérifier que, pour tout réel $x \geqslant 0$
   $$f'(x) = \frac{b\mathrm{e}^{-bx}}{\left(1+\mathrm{e}^{-bx}\right)^2}.$$
3. En utilisant les données de l'énoncé, déterminer $b$.

**Partie B**

La proportion d'individus qui possèdent un certain type d'équipement dans une population est modélisée par la fonction $p$ définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$p(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-0{,}2x}}.$$

Le réel $x$ représente le temps écoulé, en année, depuis le 1^er^ janvier 2000.
Le nombre $p(x)$ modélise la proportion d'individus équipés après $x$ années.
Ainsi, pour ce modèle, $p(0)$ est la proportion d'individus équipés au 1^er^ janvier 2000 et $p(3{,}5)$ est la proportion d'individus équipés au milieu de l'année 2003.

1. Quelle est, pour ce modèle, la proportion d'individus équipés au 1er janvier 2010 ? On en donnera une valeur arrondie au centième.

2. a. Déterminer le sens de variation de la fonction $p$ sur $[0\,;\,+\infty[$.
   b. Calculer la limite de la fonction $p$ en $+\infty$.
   c. Interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.
3. On considère que, lorsque la proportion d'individus équipés dépasse 95 %, le marché est saturé.
   Déterminer, en expliquant la démarche, l'année au cours de laquelle cela se produit.
4. On définit la proportion moyenne d'individus équipés entre 2008 et 2010 par

$$m = \frac{1}{2}\int_{8}^{10} p(x)\,\mathrm{d}x.$$

   a. Vérifier que, pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$p(x) = \frac{\mathrm{e}^{0,2x}}{1+\mathrm{e}^{0,2x}}.$$

   b. En déduire une primitive de la fonction $p$ sur $[0\,;\,+\infty[$.
   c. Déterminer la valeur exacte de $m$ et son arrondi au centième.

**Exercice 6**

**EXERCICE 4** **7 points**

**Principaux domaines abordés :** suites, fonctions, primitives

*Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.*
*Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.*
*Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.*
*Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.*
*Aucune justification n'est demandée.*

**1.** On considère la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

On peut affirmer que :

**a.** la suite $(u_n)$ diverge vers $+\infty$.
**b.** la suite $(u_n)$ diverge vers $-\infty$.
**c.** la suite $(u_n)$ n'a pas de limite.
**d.** la suite $(u_n)$ converge.

✧✧✧

Dans les questions 2 et 3, on considère deux suites $(v_n)$ et $(w_n)$ vérifiant la relation :

$$w_n = \mathrm{e}^{-2v_n} + 2.$$

**2.** Soit $a$ un nombre réel strictement positif. On a $v_0 = \ln(a)$.

**a.** $w_0 = \dfrac{1}{a^2} + 2$
**b.** $w_0 = \dfrac{1}{a^2 + 2}$
**c.** $w_0 = -2a + 2$
**d.** $w_0 = \dfrac{1}{-2a} + 2$

**3.** On sait que la suite $(v_n)$ est croissante. On peut affirmer que la suite $(w_n)$ est :

**a.** décroissante et majorée par 3.
**b.** décroissante et minorée par 2 .
**c.** croissante et majorée par 3 .
**d.** croissante et minorée par 2.

**4.** On considère la suite $(a_n)$ ainsi définie :

$$a_0 = 2 \text{ et, pour tout entier naturel } n, \quad a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{8}{3}.$$

Pour tout entier naturel $n$, on a :

**a.** $a_n = 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n - 2$

**b.** $a_n = -\frac{2}{3^n} + 4$

**c.** $a_n = 4 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$

**d.** $a_n = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{8n}{3}$

**5.** On considère une suite $(b_n)$ telle que, pour tout entier naturel $n$, on a :

$$b_{n+1} = b_n + \ln\left(\frac{2}{(b_n)^2 + 3}\right).$$

On peut affirmer que :

**a.** la suite $(b_n)$ est croissante.

**b.** la suite $(b_n)$ est décroissante.

**c.** la suite $(b_n)$ n'est pas monotone.

**d.** le sens de variation de la suite $(b_n)$ dépend de $b_0$.

**6.** On considère la fonction $g$ définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x}.$$

On note $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de la fonction $g$ dans un repère orthogonal.
La courbe $\mathscr{C}_g$ admet :

**a.** une asymptote verticale et une asymptote horizontale.

**b.** une asymptote verticale et aucune asymptote horizontale.

**c.** aucune asymptote verticale et une asymptote horizontale.

**d.** aucune asymptote verticale et aucune asymptote horizontale.

**7.** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{x^2+1}.$$

Soit $F$ une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f$. Pour tout réel $x$, on a :

**a.** $F(x) = \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{x^2+1}$

**b.** $F(x) = \left(1 + 2x^2\right)\mathrm{e}^{x^2+1}$

**c.** $F(x) = \mathrm{e}^{x^2+1}$

**d.** $F(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2+1}$

Exercice 7

**EXERCICE 4 6 points Thème : Fonctions, Fonction exponentielle, Fonction logarithme ; Suites**

**Partie A**

On considère la fonction $f$ définie pour tout réel $x$ de $]0\,;\,1]$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x} + \ln(x).$$

1. Calculer la limite de $f$ en 0.
2. On admet que $f$ est dérivable sur $]0\,;\,1]$. On note $f'$ sa fonction dérivée.
   Démontrer que, pour tout réel $x$ appartenant à $]0\,;\,1]$, on a :

$$f'(x) = \frac{1 - x\mathrm{e}^{-x}}{x}$$

3. Justifier que, pour tout réel $x$ appartenant à $]0\,;\,1]$, on a $x\mathrm{e}^{-x} < 1$.
   En déduire le tableau de variation de $f$ sur $]0\,;\,1]$.
4. Démontrer qu'il existe un unique réel $\ell$ appartenant à $]0\,;\,1]$ tel que $f(\ell) = 0$.

**Partie B**

1. On définit deux suites $(a_n)$ et $(b_n)$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_0 & = & \dfrac{1}{10} \\ b_0 & = & 1 \end{array}\right. \text{ et, pour tout entier naturel } n, \left\{\begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & \mathrm{e}^{-b_n} \\ b_{n+1} & = & \mathrm{e}^{-a_n} \end{array}\right.$$

   **a.** Calculer $a_1$ et $b_1$. On donnera des valeurs approchées à $10^{-2}$ près.

   **b.** On considère ci-dessous la fonction `termes`, écrite en langage Python.

```
def termes (n) :
  a=1/10
  b=1
  for k in range(0,n) :
    c= ...
    b = ...
    a = c
  return(a,b)
```

   Recopier et compléter sans justifier le cadre ci-dessus de telle sorte que la fonction termes calcule les termes des suites $(a_n)$ et $(b_n)$.

2. On rappelle que la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

   **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, on a :

$$0 < a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant 1$$

   **b.** En déduire que les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ sont convergentes.

3. On note $A$ la limite de $(a_n)$ et $B$ la limite de $(b_n)$.
   On admet que $A$ et $B$ appartiennent à l'intervalle $]0\,;\,1]$, et que $A = \mathrm{e}^{-B}$ et $B = \mathrm{e}^{-A}$.

   **a.** Démontrer que $f(A) = 0$.

   **b.** Déterminer $A - B$.