EXERCICES – FONCTIONS LOGARITHMES

Exercice 1

EXERCICE 2 **6 points**

On considère la fonction f définie sur $]-1,5\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \ln(2x+3) - 1.$$

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence de la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et } u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout entier naturel } n.$$

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $]-1,5\,;\,+\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.

1. Déterminer la limite de la fonction g en $-1,5$.
   On admet que la limite de la fonction g en $+\infty$ est $-\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction g sur $]-1,5\,;\,+\infty[$.
3. **a.** Démontrer que, dans l'intervalle $]-0,5\,;\,+\infty[$, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α.
   b. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie B : Étude de la suite (u_n)

On admet que la fonction f est strictement croissante sur $]-1,5\,;\,+\infty[$.

1. Soit x un nombre réel. Montrer que si $x \in [-1\,;\,\alpha]$ alors $f(x) \in [-1\,;\,\alpha]$.
2. **a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$-1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha.$$

   b. En déduire que la suite (u_n) converge.

Exercice 2

EXERCICE 2 **5 points**

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x^2 - 8\ln(x)$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.
On admet que f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, on note f' sa fonction dérivée.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.
2. On admet que, pour tout $x > 0$, $f(x) = x^2\left(1 - 8\dfrac{\ln(x)}{x^2}\right)$.
   En déduire la limite : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
3. Montrer que, pour tout réel x de $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{2\left(x^2-4\right)}{x}$.
4. Étudier les variations de f sur $]0\,;\,+\infty[$ et dresser son tableau de variations complet.
   On précisera la valeur exacte du minimum de f sur $]0\,;\,+\infty[$.
5. Démontrer que, sur l'intervalle $]0\,;2]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α (on ne cherchera pas à déterminer la valeur de α).
6. On admet que, sur l'intervalle $[2\,;\,+\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique β (on ne cherchera pas à déterminer la valeur de β).
   En déduire le signe de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
7. Pour tout nombre réel k, on considère la fonction g_k définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g_k(x) = x^2 - 8\ln(x) + k.$$

   En s'aidant du tableau de variations de f, déterminer la plus petite valeur de k pour laquelle la fonction g_k est positive sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Exercice 3

EXERCICE 1 **5 points**

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = \ln\left(x^2\right) + x - 2$$

1. Déterminer les limites de la fonction g aux bornes de son ensemble de définition.
2. On admet que la fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
3. **a.** Démontrer qu'il existe un unique réel strictement positif α tel que $g(\alpha) = 0$.
   b. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
4. En déduire le tableau de signe de la fonction g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{(x-2)}{x}\ln(x).$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en 0.
   b. Interpréter graphiquement le résultat.
2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
3. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   Montrer que pour tout réel x strictement positif, on a $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.
4. En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$,

Partie C

Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la courbe représentative de la fonction ln sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Exercice 4

EXERCICE 3 **5 points**

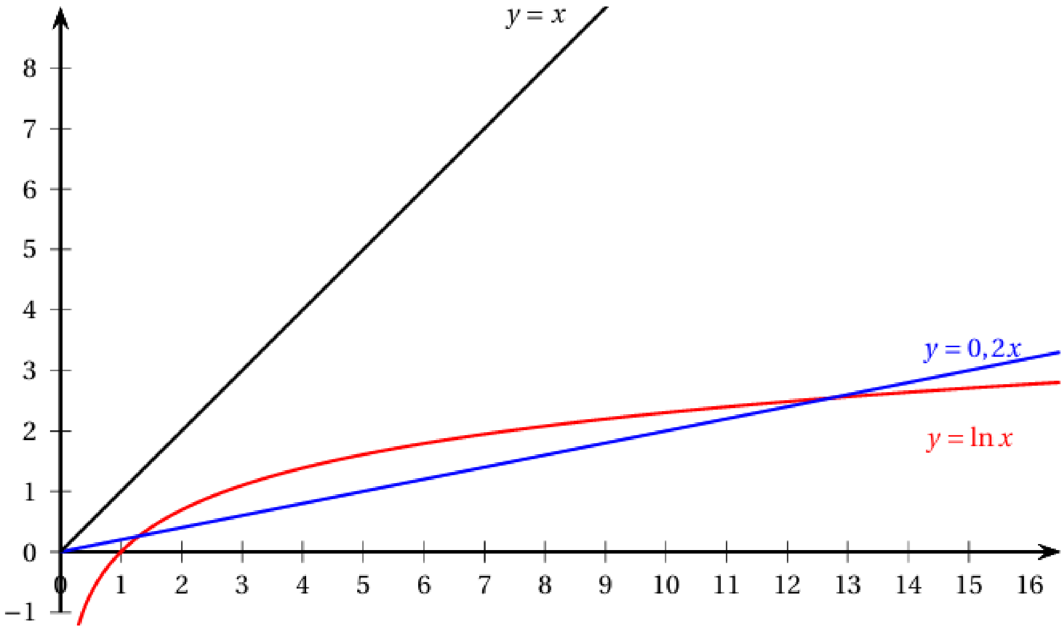
Soit k un réel strictement positif.
Le but de cet exercice est de déterminer le nombre de solutions de l'équation

$$\ln(x) = kx$$

de paramètre k.

1. Conjectures graphiques :

On a représenté, ci-dessous, dans un repère orthogonal, la courbe d'équation $y = \ln(x)$, la droite d'équation $y = x$ ainsi que la droite d'équation $y = 0,2x$:



À partir du graphique ci-dessus, conjecturer le nombre de solutions de l'équation $\ln(x) = kx$ pour $k = 1$ puis pour $k = 0,2$.

2. Étude du cas $k = 1$:

On considère la fonction f, définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$, par :

$$f(x) = \ln(x) - x.$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

a. Calculer $f'(x)$.

b. Étudier le sens de variation de la fonction f sur $]0 ; +\infty[$.

Dresser le tableau des variations de la fonction f en y faisant figurer la valeur exacte des extremums s'il y en a.

Les limites aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.

c. En déduire le nombre de solutions de l'équation $\ln(x) = x$.

3. Étude du cas général :

k est un nombre réel strictement positif.

On considère la fonction g définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(x) - kx.$$

On admet que le tableau des variations de la fonction g est le suivant :

x	0		$\frac{1}{k}$		$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$g\left(\frac{1}{k}\right)$	$\searrow$	$-\infty$

a. Donner, en fonction du signe de $g\left(\frac{1}{k}\right)$ le nombre de solutions de l'équation $g(x) = 0$.

b. Calculer $g\left(\frac{1}{k}\right)$ en fonction du réel k.

c. Montrer que $g\left(\frac{1}{k}\right) > 0$ équivaut à $\ln(k) < -1$.

d. Déterminer l'ensemble des valeurs de k pour lesquelles l'équation $\ln(x) = kx$ possède exactement deux solutions.

e. Donner, selon les valeurs de k, le nombre de solutions de l'équation $\ln(x) = kx$.

Exercice 5

EXERCICE 4 5 points

On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = 5x^2 + 2x - 2x^2\ln(x).$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan.
On admet que f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1. **a.** Démontrer que la limite de la fonction f en 0 est égale à 0.
   b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
3. **a.** Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$

$$f''(x) = 4(1 - \ln(x)).$$

   b. En déduire le plus grand intervalle sur lequel la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes.
   c. Dresser le tableau des variations de la fonction f' sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   (On admettra que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x) = 2$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = -\infty$.)
4. **a.** Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ une unique solution α dont on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-2}.
   b. En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ ainsi que le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
5. **a.** En utilisant l'égalité $f'(\alpha) = 0$, démontrer que :

$$\ln(\alpha) = \frac{4\alpha + 1}{2\alpha}.$$

   En déduire que $f(\alpha) = \alpha^2 + \alpha$.
   b. En déduire un encadrement d'amplitude 10^{-1} du maximum de la fonction f.

Exercice 6

EXERCICE 1 7 points

Principaux domaines abordés : fonctions, fonction logarithme ; convexité.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x^2 - 6x + 4\ln(x).$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. **a.** Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.
   Interpréter graphiquement ce résultat.
   b. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
2. **a.** Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$.
   b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   En déduire le tableau de variations de f.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[4\,;5]$.
4. On admet que, pour tout x de $]0\ ;\ +\infty[$, on a :

$$f''(x) = \frac{2x^2 - 4}{x^2}.$$

   a. Étudier la convexité de la fonction f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
   On précisera les valeurs exactes des coordonnées des éventuels points d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.
   b. On note A le point de coordonnées $\left(\sqrt{2}\ ;\ f\left(\sqrt{2}\right)\right)$.
   Soit t un réel strictement positif tel que $t \neq \sqrt{2}$. Soit M le point de coordonnées $(t\ ;\ f(t))$.
   En utilisant la question 4. a, indiquer, selon la valeur de t, les positions relatives du segment $[\mathrm{A}M]$ et de la courbe $\mathscr{C}_f$.

Exercice 7

Exercice 2 **7 points** **Thèmes : Fonction logarithme et suite**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x\ln(x) + 1$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0 ainsi que sa limite en $+\infty$.

2. **a.** On admet que f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et on notera f' sa fonction dérivée. Montrer que pour tout réel x strictement positif :

$$f'(x) = 1 + \ln(x).$$

b. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$. On y fera figurer la valeur exacte de l'extremum de f sur $]0\,;\,+\infty[$ et les limites.

c. Justifier que pour tout $x \in]0\,;\,1[$, $f(x) \in]0\,;\,1[$.

3. **a.** Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

b. Étudier la convexité de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$.

c. En déduire que pour tout réel x strictement positif :

$$f(x) \geqslant x$$

4. On définit la suite (u_n) par son premier terme u_0 élément de l'intervalle $]0\,;\,1[$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $0 < u_n < 1$.

b. Déduire de la question 3. c. la croissance de la suite (u_n).

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.