EXERCICES – LIMITES DE FONCTION : exercices du BAC

Exercice 1

EXERCICE 1 **5 points**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x} + 2x - 1.$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
On appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' la fonction dérivée seconde de f, c'est-à-dire la fonction dérivée de la fonction f'.

Partie A : Étude de la fonction f

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.

Exercice 2

EXERCICE 4 **5 points**

On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = 5x^2 + 2x - 2x^2\ln(x).$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan.
On admet que f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1. **a.** Démontrer que la limite de la fonction f en 0 est égale à 0.
   b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

Exercice 3

EXERCICE 2 **6 points**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$ par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x-1}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$.
On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en 1.
   b. En déduire une interprétation graphique.
2. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

Exercice 4

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(1 + e^{-x}\right) + \frac{1}{4}x.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ du plan.

Partie A

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 5

EXERCICE 2 **6 points**

On considère la fonction f définie sur $]-1,5\,;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \ln(2x+3) - 1.$$

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $]-1,5\,;\ +\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.

1. Déterminer la limite de la fonction g en $-1,5$.
   On admet que la limite de la fonction g en $+\infty$ est $-\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction g sur $]-1,5\,;\ +\infty[$.
3. **a.** Démontrer que, dans l'intervalle $]-0,5\,;\ +\infty[$, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α.
   b. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Exercice 6

EXERCICE 2 **5 points**

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x^2 - 8\ln(x)$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.
On admet que f est dérivable sur $]0\,;\ +\infty[$, on note f' sa fonction dérivée.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.
   Donner une interprétation graphique.
2. On admet que, pour tout $x > 0$, $f(x) = x^2\left(1 - 8\dfrac{\ln(x)}{x^2}\right)$.
   En déduire la limite : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Exercice 7

Exercice 4 — 5 points

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

et on appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. On définit la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x)=\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$.
   - **a.** Montrer que $g'(x)=f(x)$ pour tout x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   - **b.** Pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, calculer $f'(x)$ et montrer que :

$$f'(x)=\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)}{4x\sqrt{x}}.$$

2. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en 0.
   - **b.** Interpréter graphiquement ce résultat.
3. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

Exercice 8

Exercice 1 — 7 points

Principaux domaines abordés : fonctions, fonction logarithme ; convexité.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x)=x^2-6x+4\ln(x).$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

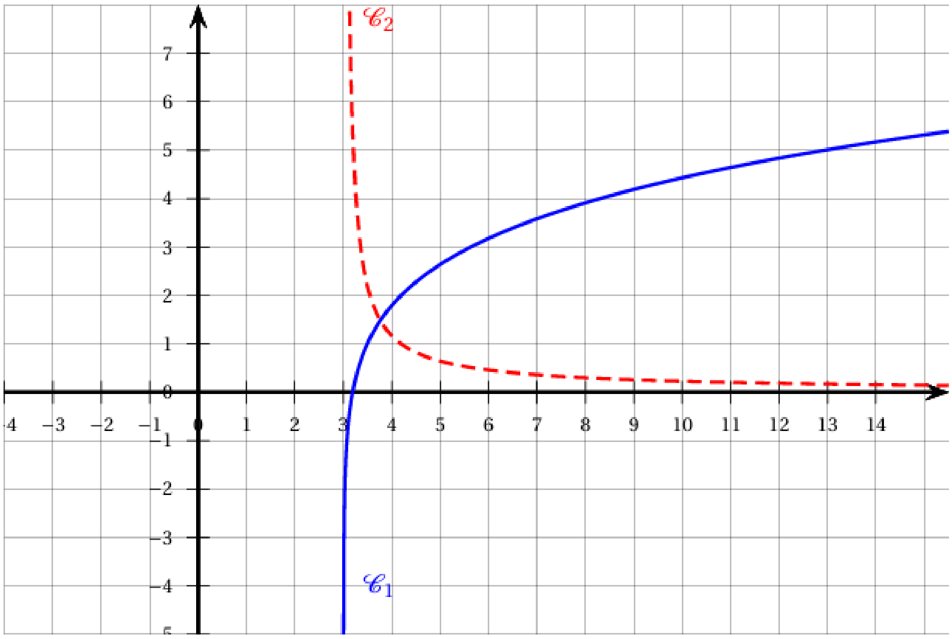
1. **a.** Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.
   Interpréter graphiquement ce résultat.
   - **b.** Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

Exercice 9

EXERCICE 2 **7 points**

Principaux domaines abordés : Étude des fonctions. Fonction logarithme.

Partie A



Dans le repère orthonormé ci-dessus, sont tracées les courbes représentatives d'une fonction f et de sa fonction dérivée, notée f', toutes deux définies sur $]3\,;\,+\infty[$.

1. Associer à chaque courbe la fonction qu'elle représente. Justifier.
2. Déterminer graphiquement la ou les solutions éventuelles de l'équation $f(x) = 3$.
3. Indiquer, par lecture graphique, la convexité de la fonction f.

Partie B

1. Justifier que la quantité $\ln\left(x^2 - x - 6\right)$ est bien définie pour les valeurs x de l'intervalle $]3\,;\,+\infty[$, que l'on nommera I dans la suite.
2. On admet que la fonction f de la partie A est définie par $f(x) = \ln\left(x^2 - x - 6\right)$ sur I.
   Calculer les limites de la fonction f aux deux bornes de l'intervalle I.
   En déduire une équation d'une asymptote à la courbe représentative de la fonction f sur I.
3. **a.** Calculer $f'(x)$ pour tout x appartenant à I.
   b. Étudier le sens de variation de la fonction f sur I.
   Dresser le tableau des variations de la fonction f en y faisant figurer les limites aux bornes de I.
4. **a.** Justifier que l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]5\,;\,6[$.
   b. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, un encadrement de α à 10^{-2} près.
5. **a.** Justifier que $f''(x) = \dfrac{-2x^2 + 2x - 13}{\left(x^2 - x - 6\right)^2}$.
   b. Étudier la convexité de la fonction f sur I.

Exercice 10

EXERCICE 2 FONCTIONS, FONCTION LOGARITHME **7 points**

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f, définie sur $]0\,;\,+\infty[$,par :

$$f(x) = 3x - x\ln(x) - 2\ln(x).$$

PARTIE A : Étude d'une fonction auxiliaire g

Soit g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = 2(x-1) - x\ln(x).$$

On note g' la fonction dérivée de g. On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

1. Calculer $g(1)$ et $g(\mathrm{e})$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+0} g(x)$ en justifiant votre démarche.
3. Montrer que, pour tout $x > 0$, $g'(x) = 1 - \ln(x)$.
   En déduire le tableau des variations de g sur $]0\,;\,+\infty[$.
4. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions distinctes sur $]0\,;\,+\infty[$: 1 et α avec α appartenant à l'intervalle $[\mathrm{e}\,;\,+\infty[$.
   On donnera un encadrement de α à 0,01 près.
5. En déduire le tableau de signes de g sur $]0\,;\,+\infty[$.