EXERCICES – PROBABILITÉS CONDITIONNELLES ET INDÉPENDANCE

On rappelle que deux événements $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont indépendants si et seulement si :

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{A}) \times \boldsymbol{p}(\boldsymbol{B})$$

Exercice 1

Dans cet exercice, A et B désignent deux événements de l'univers d'une expérience aléatoire. Dire, dans chaque cas, si A et B sont indépendants.

1. $P(A) = 0,2$, $P(A \cap B) = 0,08$ et $P(A \cup B) = 0,5$;

2. $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,6$ et $P(A \cup B) = 0,7$.

Exercice 2

Une urne contient trois boules $\boldsymbol{B1}$, $\boldsymbol{B2}$ et $\boldsymbol{B3}$ indiscernables au toucher.

On vide l'urne par tirages successifs des boules.

1. Déterminer le nombre de tirages possibles. Sont-ils équiprobables?

2. On considère les événements suivants :

- $\boldsymbol{A}$: «La boule $\boldsymbol{B1}$ est extraite de l'urne avant $\boldsymbol{B2}$. »
- $\boldsymbol{B}$: «La boule $\boldsymbol{B1}$ est extraite au premier tirage. »
- $\boldsymbol{C}$: «La boule $\boldsymbol{B1}$ est extraite au deuxième tirage. »

a) Déterminer les probabilités de ces trois événements.

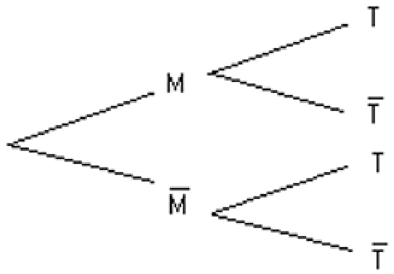
b) Les événements $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont-ils indépendants?

c) Les événements $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{C}$ sont-ils indépendants

Exercice 3

Dans un magasin d'électroménager, on s'intéresse au comportement d'un acheteur potentiel d'un téléviseur et d'un magnétoscope. La probabilité pour qu'il achète un téléviseur est de 0,6. La probabilité pour qu'il achète un magnétoscope quand il a acheté un téléviseur est de 0,4. La probabilité pour qu'il achète un magnétoscope quand il n'a pas acheté de téléviseur est de 0,2.

1) Quelle est la probabilité pour qu'il achète un téléviseur et un magnétoscope ?
2) Quelle est la probabilité pour qu'il achète un magnétoscope ?
3) Le client achète un magnétoscope. Quelle est la probabilité qu'il achète un téléviseur ?
4) Compléter l'arbre de probabilité suivant :



Exercice 4

On dispose de deux urnes u_1 et u2u_1.

L'urne u_1 contient trois boules blanches et une boule noire . L'urne u_2 contient une boule blanche et deux boules noires.

On lance un dé non truqué. Si le dé donne un numéro k inférieur ou égal à 2, on tire une boule dans l'urne u_1. Sinon on tire une boule dans l'urne u_2. (On suppose que les boules sont indiscernables au toucher)

1) Calculer la probabilité de tirer une boule blanche.
2) On a tiré une boule blanche. Calculer le probabilité qu'elle provienne de l'urne u_1.

Exercice 5

EXERCICE 1 **7 points**

Principaux domaines abordés : Probabilités

Au basket-ball, il existe deux sortes de tir :

— les tirs à deux points.
Ils sont réalisés près du panier et rapportent deux points s'ils sont réussis.

— les tirs à trois points.
Ils sont réalisés loin du panier et rapportent trois points s'ils sont réussis.

Stéphanie s'entraîne au tir. On dispose des données suivantes :

- Un quart de ses tirs sont des tirs à deux points. Parmi eux, 60 % sont réussis.
- Trois quarts de ses tirs sont des tirs à trois points. Parmi eux, 35 % sont réussis.

1. Stéphanie réalise un tir.
On considère les évènements suivants :

D : « Il s'agit d'un tir à deux points ».

R : « le tir est réussi ».

a. Représenter la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.

b. Calculer la probabilité $p\left(\overline{D} \cap R\right)$.

c. Démontrer que la probabilité que Stéphanie réussisse un tir est égale à $0,4125$.

d. Stéphanie réussit un tir. Calculer la probabilité qu'il s'agisse d'un tir à trois points. Arrondir le résultat au centième.

Exercice 6

Parmi les malades un vacciné pour quatre non vaccinés. On sait de plus qu'au cours de cette épidémie, il y avait un malade sur douze parmi les vaccinés.

1) Démontrer que la probabilité de tomber malade est égale à $\frac{5}{48}$.
2) Quelle était la probabilité de tomber malade pour un individu non-vacciné ?
3) Le vaccin est-il efficace ?

Exercice 7

EXERCICE 1 **(7 points)** **Thème : probabilités**

Le coyote est un animal sauvage proche du loup, qui vit en Amérique du Nord.
Dans l'état d'Oklahoma, aux États-Unis, 70 % des coyotes sont touchés par une maladie appelée ehrlichiose.
Il existe un test aidant à la détection de cette maladie. Lorsque ce test est appliqué à un coyote, son résultat est soit positif, soit négatif, et on sait que :

- Si le coyote est malade, le test est positif dans 97 % des cas.
- Si le coyote n'est pas malade, le test est négatif dans 95 % des cas.

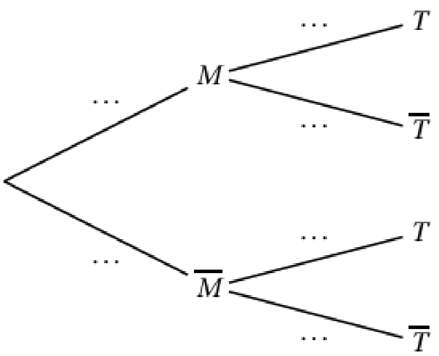
Partie A

Des vétérinaires capturent un coyote d'Oklahoma au hasard et lui font subir un test pour l'ehrlichiose.
On considère les évènements suivants :

- M : « le coyote est malade » ;
- T : « le test du coyote est positif ».

On note $\overline{M}$ et $\overline{T}$ respectivement les évènements contraires de M et T.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation.



2. Déterminer la probabilité que le coyote soit malade et que son test soit positif.
3. Démontrer que la probabilité de T est égale à $0,694$.
4. On appelle « valeur prédictive positive du test » la probabilité que le coyote soit effectivement malade sachant que son test est positif.
   Calculer la valeur prédictive positive du test. On arrondira le résultat au millième.
5. **a.** Par analogie avec la question précédente, proposer une définition de la « valeur prédictive négative du test » et calculer cette valeur en arrondissant au millième.
   b. Comparer les valeurs prédictives positive et négative du test, et interpréter.