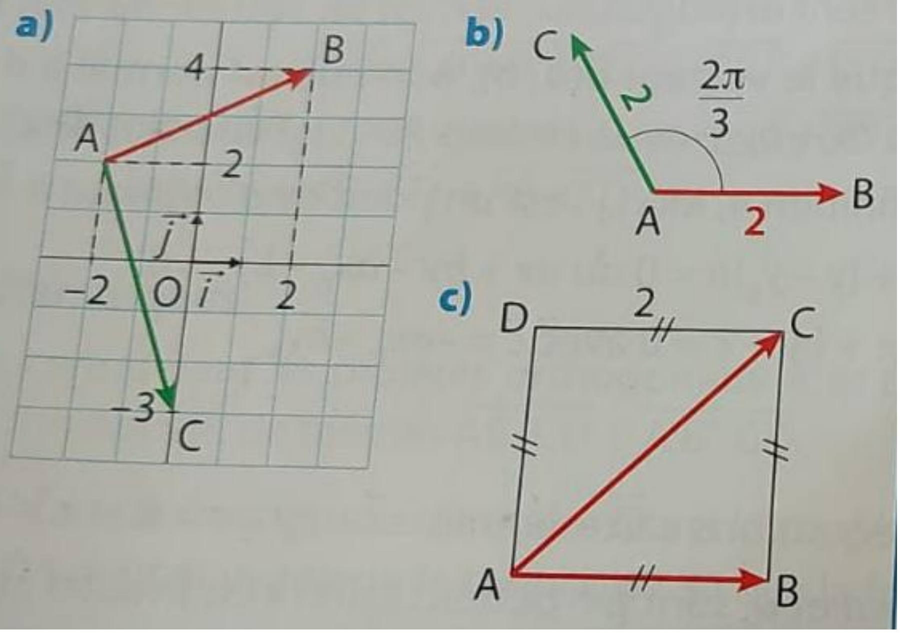
EXERCICES – PRODUIT SCALAIRE

Exercice 1

1 Calculez $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ dans chaque cas.



Exercice 2

2 On donne les points $A(3\,;\,-2)$, $B(1\,;\,2)$ et $C(5\,;\,-3)$. Calculez $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

Exercice 3

3 Dans chacun des cas suivants, calculez $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

a) $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j}$.

b) $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = 2$ et $(\vec{u}, \vec{v}) = -\dfrac{2\pi}{3}$.

c) $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 4$.

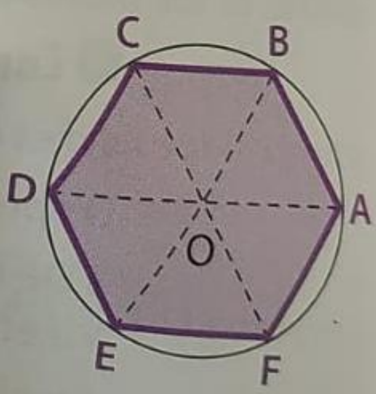
Exercice 4

4 ABCDEF est un hexagone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1.

Calculez :

a) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ **b)** $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$

c) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC}$ **d)** $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AD}$.



Exercice 5

... sont relatives à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

5 ABC est un triangle tel que :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 18$, $AB = 6$ et $AC = 2\sqrt{3}$.

1. Quelle expression choisir pour calculer $\cos \widehat{BAC}$?

2. Quelle est la mesure en radians de l'angle $\widehat{BAC}$?

6 On donne les points $A(3 ; 0)$, $B(0 ; 4)$ et $C(8 ; 0)$.

1. a) Calculez BA et BC.

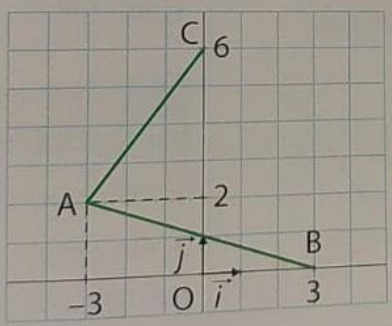
b) Démontrez que $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 40$ et que :

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 20\sqrt{5} \cos \widehat{ABC}.$$

2. Déduisez-en $\cos \widehat{ABC}$, puis une mesure de $\widehat{ABC}$ à un degré près.

7 On donne les points $A(-3 ; 2)$, $B(3 ; 0)$ et $C(0 ; 6)$.

1. Calculez $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.



2. a) Démontrez que $\cos \widehat{BAC} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

b) Déduisez-en une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ à un degré près.

8 A, B et C sont trois points tels que :

- $AB = 4$;
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3$;
- $\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{6}$.

Calculez la longueur AC.

9 Dans chacun des cas suivants, trouvez une mesure en radians de l'angle géométrique associé aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

a) $\|\vec{u}\| = 3$; $\|\vec{v}\| = 2$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3\sqrt{3}$.

b) $\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ et $\vec{v} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$.

c) $\|\vec{u}\| = \sqrt{3}$, $\|\vec{v}\| = 2\sqrt{3}$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -3$.

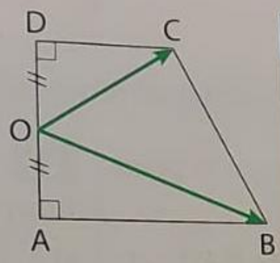
10 A, B et C sont trois points tels que :

- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de sens contraires ;
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -15$;
- $AC = 3$.

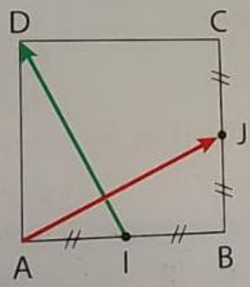
Calculez la longueur AB.

Exercice 6

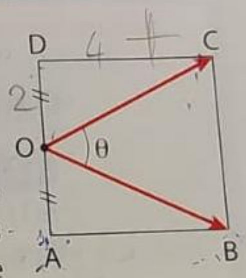
14 ABCD est un trapèze rectangle en A et D tel que $AB = 5$, $AD = 4$ et $DC = 3$. O est le milieu de [AB]. Démontrez, à l'aide de la relation de Chasles, que $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 11$.



15 ABCD est un carré de côté 2. I et J sont les milieux respectifs de [AB] et [BC].
En décomposant chacun des vecteurs $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{ID}$, calculez le produit scalaire $\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{ID}$.
Que pouvez-vous conclure ?



16 ABCD est un carré de côté 4. O est le milieu du segment [AD].
Le but de l'exercice est de calculer le produit scalaire $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}$ de deux manières différentes et d'en déduire une mesure θ de l'angle $\widehat{BOC}$.



1. En décomposant $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$, démontrez que :
$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = AB^2 - AO^2 = 12.$$

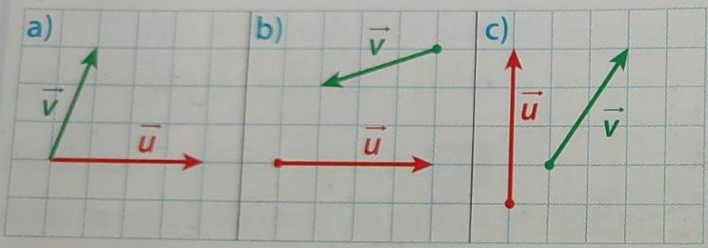
2. a) Calculez OB et OC.

b) Déduisez-en que $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 20 \cos \theta$.

3. Calculez $\cos \theta$, puis déduisez-en une mesure de l'angle $\widehat{BOC}$ arrondie à un degré près.

Exercice 7

11 L'unité choisie est le côté d'un carré du quadrillage. Calculez $\vec{u} \cdot \vec{v}$ dans chaque cas.



12 ABCD est un carré de côté 3. CBE est un triangle rectangle extérieur à ABCD tel que $BE = 2$.

Calculez :

a) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BE}$ **b)** $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{AD}$.

13 ABC est un triangle, H est le pied de la hauteur issue de C.

1. Pourquoi $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$?

2. On donne $AB = 6$, $AC = 4$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -12$.
Pourquoi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont-ils colinéaires et de sens contraire ? Déduisez-en AH.

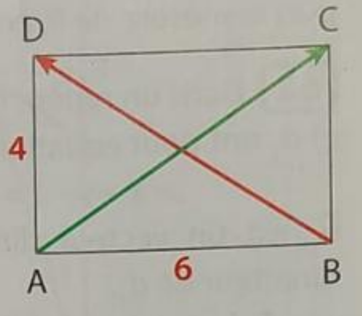
3. Construisez une figure (unité : 1 cm).

Exercice 8

56 Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points $A(-4 ; 1)$, $B(-1 ; 2)$ et $C(1 ; -4)$.
Démontrez que le triangle ABC est rectangle.

Exercice 9

58 ABCD est un rectangle, $AB = 6$ et $AD = 4$.

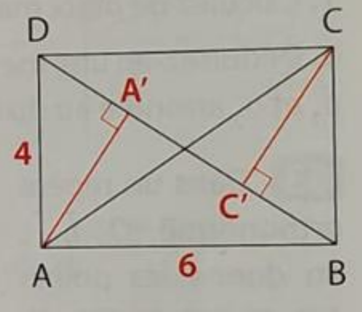


1. Exprimez $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

2. Déduisez-en que :

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = -20.$$

59 On reprend la figure de l'exercice précédent.



1. Justifiez que :

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{A'C'} \cdot \overrightarrow{BD}.$$

2. Sachant que $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = -20$, démontrez que :

$$A'C' = \frac{10\sqrt{13}}{13}.$$