EXERCICES DU BAC – SUITES & PROBABILITÉS

Exercice 1

EXERCICE 2 **6 points**

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Dans une grande ville française, des trottinettes électriques sont mises à disposition des usagers. Une entreprise, chargée de l'entretien du parc de trottinettes, contrôle leur état chaque lundi.

Partie A

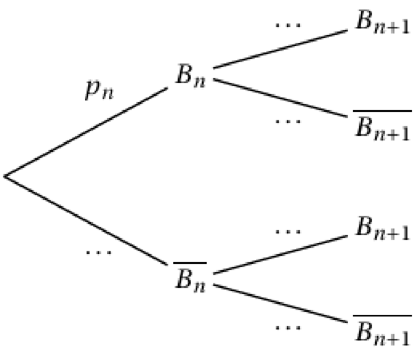
On estime que :

— lorsqu'une trottinette est en bon état un lundi, la probabilité qu'elle soit encore en bon état le lundi suivant est 0,9 ;

— lorsqu'une trottinette est en mauvais état un lundi, la probabilité qu'elle soit en bon état le lundi suivant est 0,4.

On s'intéresse à l'état d'une trottinette lors des phases de contrôle.
Soit n un entier naturel.
On note B_n l'évènement « la trottinette est en bon état n semaines après sa mise en service » et p_n la probabilité de B_n.
Lors de sa mise en service, la trottinette est en bon état. On a donc $p_0 = 1$.

1. Donner p_1 et montrer que $p_2 = 0,85$.
   On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.
2. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



3. En déduire que, pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4$.
4. **a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $p_n \geqslant 0,8$.
   b. À partir de ce résultat, quelle communication l'entreprise peut-elle envisager pour valoriser la fiabilité du parc ?
5. **a.** On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = p_n - 0,8$.
   Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.
   b. En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n.
   c. En déduire la limite de la suite (p_n).

Partie B

Dans cette partie, on modélise la situation de la façon suivante :

— l'état d'une trottinette est indépendant de celui des autres;

— la probabilité qu'une trottinette soit en bon état est égale à $0,8$.

On note X la variable aléatoire qui, à un lot de 15 trottinettes, associe le nombre de trottinettes en bon état.
Le nombre de trottinettes du parc étant très important, le prélèvement de 15 trottinettes peut être assimilé à un tirage avec remise.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.
2. Calculer la probabilité que les 15 trottinettes soient en bon état.
3. Calculer la probabilité qu'au moins 10 trottinettes soient en bon état dans un lot de 15.
4. On admet que $E(X) = 12$. Interpréter le résultat.

Exercice 2

EXERCICE 1 5 points **Thème : probabilités, suites**

Les parties A *et* B *peuvent être traitées indépendamment*

Partie A

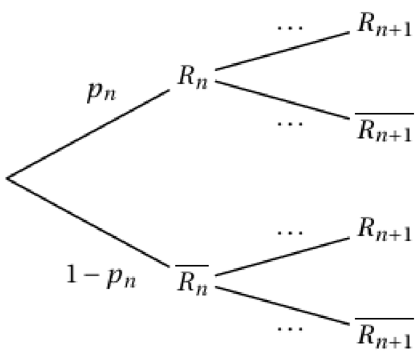
Chaque jour, un athlète doit sauter une haie en fin d'entraînement. Son entraîneur estime, au vu de la saison précédente que

- si l'athlète franchit la haie un jour, alors il la franchira dans 90 % des cas le jour suivant;
- si l'athlète ne franchit pas la haie un jour, alors dans 70 % des cas il ne la franchira pas non plus Je lendemain.

On note pour tout entier naturel n :

- R_n l'évènement : « L'athlète réussit à franchir la haie lors de la n-ième séance »,
- p_n la probabilité de l'évènement R_n. On considère que $p_0 = 0,6$.

1. Soit n un entier naturel, recopier l'arbre pondéré ci-dessous et compléter les pointillés.



2. Justifier en vous aidant de l'arbre que, pour tout entier naturel n, on a :

$$p_{n+1} = 0,6p_n + 0,3.$$

3. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = p_n - 0,75$.

a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b. Démontrer que, pour tout entier n naturel n :

$$p_n = 0,75 - 0,15 \times 0,6^n.$$

c. En déduire que la suite (p_n) est convergente et déterminer sa limite ℓ.

d. Interpréter la valeur de ℓ dans le cadre de l'exercice.

Partie B

Apres de nombreuses séances d'entraînement, l'entraineur estime maintenant que l'athlète franchit chaque haie avec une probabilité de $0,75$ et ce indépendamment d'avoir franchi ou non les haies précédentes.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de haies franchies par l'athlète à l'issue d'un 400 mètres haies qui comporte 10 haies,

1. Préciser la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X.
2. Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité que l'athlète franchisse les 10 haies.
3. Calculer $p(X \geqslant 9)$, à 10^{-3} près.

Exercice 3

EXERCICE 2 **5 points**

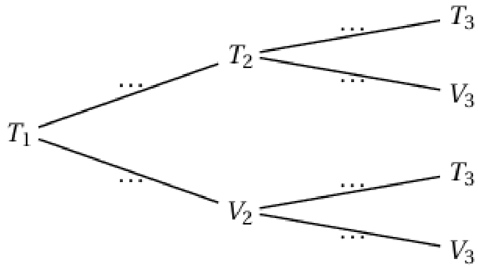
Dans un souci de préservation de l'environnement, Monsieur Durand décide de se rendre chaque matin au travail en utilisant son vélo ou les transports en commun.
S'il choisit de prendre les transports en commun un matin, il reprend les transports en commun le lendemain avec une probabilité égale à $0,8$.
S'il utilise son vélo un matin, il reprend son vélo le lendemain avec une probabilité égale à $0,4$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note :

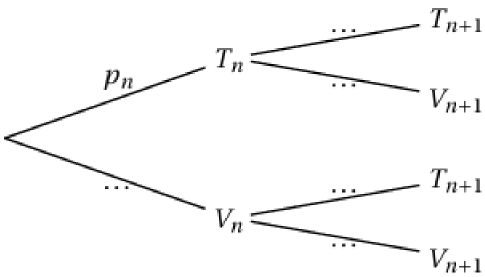
— T_n l'évènement « Monsieur Durand utilise les transports en commun le n-ième jour »
— V_n l'évènement « Monsieur Durand utilise son vélo le n-ième jour »
— On note p_n la probabilité de l'évènement T_n,

Le premier matin, il décide d'utiliser les transports en commun. Ainsi, la probabilité de l'évènement T_1 est $p_1 = 1$.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous représentant la situation pour les 2ᵉ et 3ᵉ jours,



2. Calculer p_3
3. Le 3ᵉ jour, M. Durand utilise son vélo.
   Calculer la probabilité qu'il ait pris les transports en commun la veille.
4. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous représentant la situation pour les n-ième et $(n+1)$-ième jours.



5. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,6$.
6. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, on a

$$p_n = 0,75 + 0,25 \times 0,2^{n-1}.$$

7. Déterminer la limite de la suite (p_n) et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.