EXERCICES – SUITES

Exercice 1

EXERCICE 3 7 points **Thèmes : suites**

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}$$

1. **a.** Calculer les termes u_1, u_2 et u_3. On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

   b. Recopier le script python ci-dessous et compléter les lignes 3 et 6 pour que liste(k) prenne en paramètre un entier naturel k et renvoie la liste des premières valeurs de la suite (u_n) de u_0 à u_k.

```
1.  def liste(k) :
2.      L = []
3.      u = ...
4.      for i in range(0, k+1) :
5.          L.append(u)
6.          u = ...
7.      return(L)
```

2. On admet que, pour tout entier naturel n, u_n est strictement positif.
   Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
3. En déduire que la suite (u_n) converge.
4. Déterminer la valeur de sa limite.
5. **a.** Conjecturer une expression de u_n en fonction de n.

   b. Démontrer par récurrence la conjecture précédente.

Exercice 2

EXERCICE 2 **7 points**

Principaux domaines abordés : Suites numériques. Algorithmique et programmation.

Un médicament est administré à un patient par voie intraveineuse.

Partie A : modèle discret de la quantité médicamenteuse

Après une première injection de 1 mg de médicament, le patient est placé sous perfusion.
On estime que, toutes les 30 minutes, l'organisme du patient élimine 10 % de la quantité de médicament présente dans le sang et qu'il reçoit une dose supplémentaire de 0,25 mg de la substance médicamenteuse.
On étudie l'évolution de la quantité de médicament dans le sang avec le modèle suivant :
pour tout entier naturel n, on note u_n la quantité, en mg, de médicament dans le sang du patient au bout de n périodes de trente minutes. On a donc $u_0 = 1$.

1. Calculer la quantité de médicament dans le sang au bout d'une demi-heure.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,9u_n + 0,25$.
3. **a.** Montrer par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1} < 5$.

   b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
4. On estime que le médicament est réellement efficace lorsque sa quantité dans le sang du patient est supérieure ou égale à 1,8 mg.

   a. Recopier et compléter le script écrit en langage Python suivant de manière à déterminer au bout de combien de périodes de trente minutes le médicament commence à être réellement efficace.

```
def efficace():
  u=1
  n=0
  while ......:
      u=......
      n = n+1
  return n
```

   b. Quelle est la valeur renvoyée par ce script ? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
5. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 2,5 - u_n$.

   a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme (v_0).

   b. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = 2,5 - 1,5 \times 0,9^n$.

   c. Le médicament devient toxique lorsque sa quantité présente dans le sang du patient dépasse 3 mg.
   D'après le modèle choisi, le traitement présente-t-il un risque pour le patient ? Justifier.

Exercice 3

EXERCICE 2 (7 points) **Thème : suites**

Dans cet exercice, on considère la suite (T_n) définie par :

$$T_0 = 180 \text{ et, } \quad \text{pour tout entier naturel } n, \ T_{n+1} = 0,955T_n + 0,9$$

1. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $T_n \geqslant 20$.

b. Vérifier que pour tout entier naturel n, $T_{n+1} - T_n = -0,045(T_n - 20)$. En déduire le sens de variation de la suite (T_n).

c. Conclure de ce qui précède que la suite (T_n) est convergente. Justifier.

2. Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = T_n - 20$.

a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

b. En déduire que pour tout entier naturel n, $T_n = 20 + 160 \times 0,955^n$.

c. Calculer la limite de la suite (T_n).

d. Résoudre l'inéquation $T_n \leqslant 120$ d'inconnue n entier naturel.

3. Dans cette partie, on s'intéresse à l'évolution de la température au centre d'un gâteau après sa sortie du four.

On considère qu'à la sortie du four, la température au centre du gâteau est de 180° C et celle de l'air ambiant de 20° C.

La loi de refroidissement de Newton permet de modéliser la température au centre du gâteau par la suite précédente (T_n). Plus précisément, T_n représente la température au centre du gâteau, exprimée en degré Celsius, n minutes après sa sortie du four.

a. Expliquer pourquoi la limite de la suite (T_n) déterminée à la question 2. c. était prévisible dans le contexte de l'exercice.

b. On considère la fonction Python ci-dessous :

```
def temp(x) :
    T = 180
    n = 0
    while T > x :
        T=0.955*T+0.9
        n=n+1
    return n
```

Donner le résultat obtenu en exécutant la commande temp(120).

Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 4

EXERCICE 2 7 points **suites, fonctions**

Soit k un nombre réel.
On considère la suite (u_n) définie par son premier terme u_0 et pour tout entier naturel n,

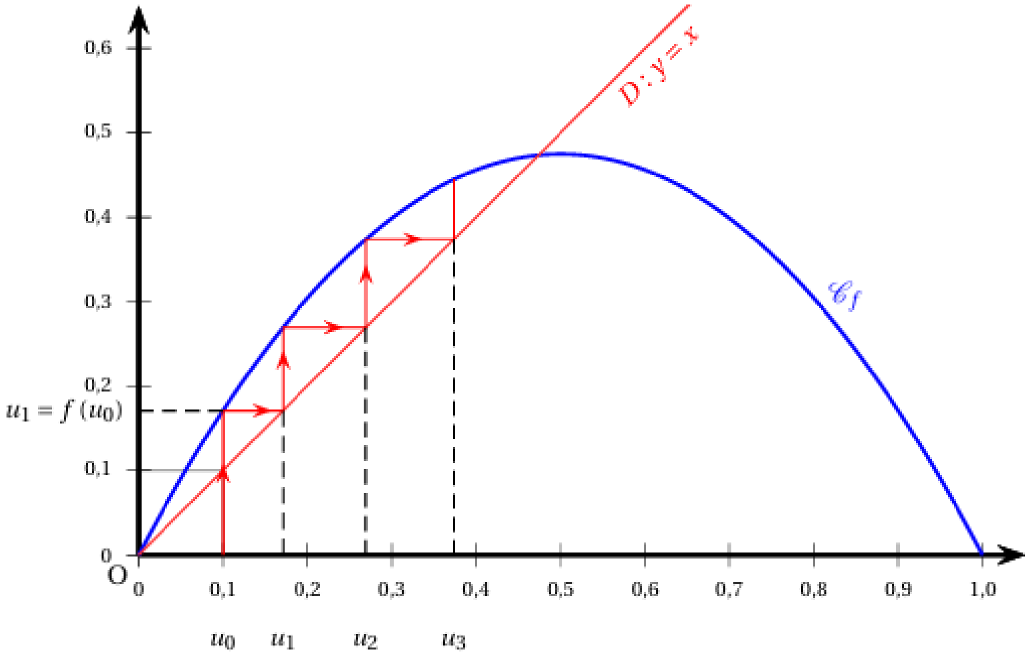
$$u_{n+1} = ku_n(1-u_n).$$

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.
On y étudie deux cas de figure selon les valeurs de k.

Partie 1

Dans cette partie, $k = 1,9$ et $u_0 = 0,1$.
On a donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1,9u_n(1-u_n)$.

1. On considère la fonction f définie sur $[0;1]$ par $f(x) = 1,9x(1-x)$.
   a. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0;1]$.
   b. En déduire que si $x \in [0;1]$ alors $f(x) \in [0;1]$.
2. Ci-dessous sont représentés les premiers termes de la suite (u_n) construits à partir de la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f et de la droite D d'équation $y = x$.
   Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) et sa limite éventuelle.



3. **a.** En utilisant les résultats de la question 1, démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}.$$

   b. En déduire que la suite (u_n) converge.
   c. Déterminer sa limite.

Partie 2

Dans cette partie, $k = \frac{1}{2}$ et $u_0 = \frac{1}{4}$.

On a donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n(1 - u_n)$ et $u_0 = \frac{1}{4}$.

On admet que pour tout entier naturel n : $0 \leqslant u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

1. Démontrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

2. On considère la fonction Python `algo (p)` où `p` désigne un entier naturel non nul :

```
def algo(p) :
  u =1/4
  n = 0
  while u > 10**(-p):
    u = 1/2*u*(1 - u)
    n = n+1
   return(n)
```

Expliquer pourquoi, pour tout entier naturel non nul `p`, la boucle while ne tourne pas indéfiniment, ce qui permet à la commande `algo (p)` de renvoyer une valeur.

Exercice 5

Exercice 2 7 points **Thèmes : suites, fonctions**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. On considère les suites (a_n) et (b_n) définie par $a_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0,5a_n + 1$ et $b_n = a_n - 2$.
On peut affirmer que :

a. (a_n) est arithmétique ; **b.** (b_n) est géométrique ;
c. (a_n) est géométrique ; **d.** (b_n) est arithmétique.

Dans les questions 2. et 3., on considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = 2,\ v_0 = 1 \text{ et, pour tout entier naturel } n : \begin{cases} u_{n+1} & = & u_n + 3v_n \\ v_{n+1} & = & u_n + v_n. \end{cases}$$

2. On peut affirmer que :

a. $\begin{cases} u_2 & = & 5 \\ v_2 & = & 3 \end{cases}$ **b.** $u_2^2 - 3v_2^2 = -2^2$ **c.** $\dfrac{u_2}{v_2} = 1,75$ **d.** $5u_1 = 3v_1$.

3. On considère le programme ci-dessous écrit en langage Python :

```
def valeurs() :
  u = 2
  v = 1
  for k in range(1,11)
    c = u
    u = u + 3*v
    v = c + v
  return (u, v)
```

Ce programme renvoie :

a. u_{11} et v_{11} ; **b.** u_{10} et v_{11} ; **c.** les valeurs de u_n et v_n pour n allant de 1 à 10 ; **d.** u_0 et v_{10}.

Exercice 6

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par : $\begin{cases} u_{n+1} & = & 3 - \dfrac{10}{u_n+4} \\ u_0 & = & 5 \end{cases}$

Partie A :

1. Déterminer la valeur exacte de u_1 et de u_2.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1$.
3. Démontrer que, pour tout entier nature n, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$.
4. En déduire le sens de variation de la suite (u_n)
5. Justifier que la suite (u_n) converge.

Partie B :

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n+2}$.

1. **a.** Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme v_0.

   b. Exprimer v_n en fonction de n.
   En déduire que pour tout entier naturel n, $v_n \neq 1$.
2. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{2v_n+1}{1-v_n}$.
3. En déduire la limite de la suite (u_n).

Partie C :

On considère l'algorithme ci-contre.

1. Après exécution de l'algorithme, quelle valeur est contenue dans la variable n ?
2. À l'aide des parties A et B, interpréter cette valeur.

$u \leftarrow 5$
$n \leftarrow 0$
Tant que $u \geqslant 1{,}01$
$\quad n \leftarrow n+1$
$\quad u \leftarrow 3 - \dfrac{10}{u+4}$
Fin du Tant que

Exercice 7

EXERCICE 2 SUITES **7 points**

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n^2$.

1. **a.** Calculer u_1 et u_2.
   b. Recopier et compléter la fonction ci-dessous écrite en langage Python. Cette fonction est nommée *suite_u* et prend pour paramètre l'entier naturel p.
   Elle renvoie la valeur du terme de rang p de la suite (u_n).

```
def suite_u(p) :
  u= ...
  for i in range(1,...) :
    u =...
  return u
```

2. **a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leqslant 4$.
   b. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
   c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
3. **a.** Justifier que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie l'égalité $\ell = \frac{1}{5}\ell^2$.
   b. En déduire la valeur de ℓ.
4. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \ln(u_n)$ et $w_n = v_n - \ln(5)$.
   a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 2v_n - \ln(5)$.
   b. Montrer que la suite (w_n) est géométrique de raison 2.
   c. Pour tout entier naturel n, donner l'expression de w_n en fonction de n et montrer que $v_n = \ln\left(\frac{4}{5}\right) \times 2^n + \ln(5)$.
5. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$ et retrouver $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.