EXERCICES DU BAC – SUITES

Exercice 1

EXERCICE 1 **5 points**

Partie A

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 400$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,9u_n + 60.$$

1. **a.** Calculer u_1 et u_2.
   b. Conjecturer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
2. Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a l'inégalité

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 600.$$

3. **a.** Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
   b. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Justifier.
4. On donne une fonction écrite en langage Python :

```
def mystere(seuil) :
    n=0
    u=400
    while u <= seuil :
        n = n+1
        u = 0.9*u+60
    return n
```

Quelle valeur obtient-on en tapant dans la console de Python : mystere (500) ?

Partie B

Un arboriculteur possède un verger dans lequel il a la place de cultiver au maximum 500 arbres.
Chaque année il vend 10 % des arbres de son verger et puis il replante 60 nouveaux arbres.
Le verger compte 400 arbres en 2023.
L'arboriculteur pense qu'il pourra continuer à vendre et à planter les arbres au même rythme pendant les années à venir.
Va-t-il être confronté à un problème de place dans son verger ? Expliquer votre réponse.

Exercice 2

EXERCICE 2 **5 points**

Des biologistes étudient l'évolution d'une population d'insectes dans un jardin botanique.
Au début de l'étude la population est de 100 000 insectes.
Pour préserver l'équilibre du milieu naturelle nombre d'insectes ne doit pas dépasser 400 000.

Partie A : Étude d'un premier modèle en laboratoire

L'observation de l'évolution de ces populations d'insectes en laboratoire, en l'absence de tout prédateur, montre que le nombre d'insectes augmente de 60 % chaque mois.
En tenant compte de cette observation, les biologistes modélisent l'évolution de la population d'insectes à l'aide d'une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n modélise le nombre d'insectes, exprimé en millions, au bout de n mois.
On a donc $u_0 = 0,1$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n : $u_n = 0,1 \times 1,6^n$.
2. Déterminer la limite de la suite (u_n).
3. En résolvant une inéquation, déterminer le plus petit entier naturel n à partir duquel $u_n > 0,4$.
4. Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel serait-il préservé ? Justifier la réponse.

Partie B : Étude d'un second modèle

En tenant compte des contraintes du milieu naturel dans lequel évoluent les insectes, les biologistes choisissent une nouvelle modélisation.
Ils modélisent le nombre d'insectes à l'aide de la suite (v_n), définie par :

$$v_0 = 0,1 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n,\ v_{n+1} = 1,6v_n - 1,6v_n^2,$$

où, pour tout entier naturel n, v_n est le nombre d'insectes, exprimé en millions, au bout de n mois.

1. Déterminer le nombre d'insectes au bout d'un mois.

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$ par

$$f(x) = 1,6x - 1,6x^2.$$

a. Résoudre l'équation $f(x) = x$.

b. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$.

3. **a.** Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

b. Montrer que la suite (v_n) est convergente.
On note ℓ la valeur de sa limite. On admet que ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

c. Déterminer la valeur de ℓ.
Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel sera-t-il préservé ? Justifier la réponse.

4. On donne ci-contre la fonction seuil, écrite en langage Python.

a. Qu'observe-t-on si on saisit seuil(0.4) ?

b. Déterminer la valeur renvoyée par la saisie de seuil(0.35).
Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

```
def seuil(a) :
    v=0.1
    n=0
    while v<a :
        v=1.6*v-1.6*v*v
        n=n+1
    return n
```

Exercice 3

Exercice 4 **5 points**

Partie A

Le but de la partie A est d'étudier le comportement de la suite (u_n) définie par $u_0 = 0,3$ et par la relation de récurrence, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n).$$

Cette relation de récurrence s'écrit $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x(1-x).$$

1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]$.
2. On admet que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2}$.
   Calculer u_1 puis effectuer un raisonnement par récurrence pour démontrer que pour tout rentier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1}$.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
4. Justifier que la limite de la suite (u_n) est égale à $\frac{1}{2}$.

Partie B

Le but de cette partie est d'étudier un modèle d'évolution d'une population.
En 2022, cette population compte 3 000 individus.

On note P_n l'effectif en milliers de la population l'année $2022 + n$. Ainsi $P_0 = 3$.
Selon un modèle inspiré du modèle de Verhulst, mathématicien belge du XIX^e^ siècle, on considère que, pour tout entier naturel n :

$$P_{n+1} - P_n = P_n(1 - b \times P_n), \text{ où } b \text{ est un réel strictement positif.}$$

Le réel b est un facteur de freinage qui permet de tenir compte du caractère limité des ressources du milieu dans lequel évoluent ces individus.

1. Dans cette question $b = 0$.
   - **a.** Justifier que la suite (P_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
   - **b.** Déterminer la limite de P_n.
2. Dans cette question $b = 0,2$.
   - **a.** Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = 0,1 \times P_n$.
     Calculer v_0 puis montrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 2v_n(1 - v_n)$.
   - **b.** Dans ce modèle, justifier que la population se stabilisera autour d'une valeur que l'on précisera.