

EXERCICES – SUITES ARITHMÉTIQUE-GÉOMÉTRIQUES – Exercices du BAC

Exercice 1

EXERCICE 2

5 points

Les parties A et B sont indépendantes

Alain possède une piscine qui contient 50 m^3 d'eau. On rappelle que $1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ L}$.

Pour désinfecter l'eau, il doit ajouter du chlore.

Le taux de chlore dans l'eau, exprimé en mg. L^{-1} , est défini comme la masse de chlore par unité de volume d'eau. Les piscinistes préconisent un taux de chlore compris entre 1 et 3 mg.L^{-1} .

Sous l'action du milieu ambiant, notamment des ultraviolets, le chlore se décompose et disparaît peu à peu.

Alain réalise certains jours, à heure fixe, des mesures avec un appareil qui permet une précision à $0,01 \text{ mg.L}^{-1}$.

Le mercredi 19 juin, il mesure un taux de chlore de $0,70 \text{ mg. L}^{-1}$.

Partie A : étude d'un modèle discret

Pour maintenir le taux de chlore dans sa piscine, Alain décide, à partir du jeudi 20 juin, d'ajouter chaque jour une quantité de 15 g de chlore. On admet que ce chlore se mélange uniformément dans l'eau de la piscine.

1. Justifier que cet ajout de chlore fait augmenter le taux de $0,3 \text{ mg. L}^{-1}$.
2. Pour tout entier naturel n , on note v_n le taux de chlore, en mg. L^{-1} , obtenu avec ce nouveau protocole n jours après le mercredi 19 juin. Ainsi $v_0 = 0,7$.

On admet que pour tout entier naturel n ,

$$v_{n+1} = 0,92v_n + 0,3.$$

- a. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $v_n \leq v_{n+1} \leq 4$.
 - b. Montrer que la suite (v_n) est convergente et calculer sa limite.
3. À long terme, le taux de chlore sera-t-il conforme à la préconisation des piscinistes? Justifier la réponse,

4. Reproduire et compléter l'algorithme ci-contre écrit en langage Python pour que la fonction `alerte_chlore` renvoie, lorsqu'il existe, le plus petit entier n tel que $v_n > s$.

5. Quelle valeur obtient-on en saisissant l'instruction `alerte_chlore(3)`?

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

```
def alerte_chlore(s) :  
    n=0  
    v=0.7  
    while _____ :  
        n= _____  
        v= _____  
    return n
```

Exercice 2

EXERCICE 1

5 points

Partie A

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 400$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,9u_n + 60.$$

- Calculer u_1 et u_2 .
 - Conjecturer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n , on a l'inégalité

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 600.$$

- Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
 - Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Justifier.
- On donne une fonction écrite en langage Python :

```
def mystere(seuil) :  
    n=0  
    u=400  
    while u <= seuil :  
        n = n+1  
        u = 0.9*u+60  
    return n
```

Quelle valeur obtient-on en tapant dans la console de Python : `mystere(500)` ?

Partie B

Un arboriculteur possède un verger dans lequel il a la place de cultiver au maximum 500 arbres.

Chaque année il vend 10% des arbres de son verger et puis il replante 60 nouveaux arbres.

Le verger compte 400 arbres en 2023.

L'arboriculteur pense qu'il pourra continuer à vendre et à planter les arbres au même rythme pendant les années à venir.

Va-t-il être confronté à un problème de place dans son verger ? Expliquer votre réponse.

Exercice 3

EXERCICE 2 5 points

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n , par :

$$u_{n+1} = 5u_n - 4n - 3.$$

1.
 - a. Démontrer que $u_1 = 12$.
 - b. Déterminer u_2 en détaillant le calcul.
 - c. À l'aide de la calculatrice, conjecturer le sens de variation ainsi que la limite de la suite (u_n) .
2.
 - a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n \geq n + 1.$$

- b. En déduire la limite de la suite (u_n) .
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = u_n - n - 1.$$

- a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
Donner sa raison et son premier terme v_0 .
 - b. En déduire, pour tout entier naturel n , l'expression de v_n en fonction de n .
 - c. En déduire que pour tout entier naturel n :

$$u_n = 2 \times 5^n + n + 1.$$

- d. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .
4. On considère la fonction ci-contre, écrite de manière incomplète en langage Python et destinée à renvoyer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geq 10^7$.
 - a. Recopier le programme et compléter les deux instructions manquantes.
 - b. Quelle est la valeur renvoyée par cette fonction ?

```
def suite() :  
    u = 3  
    n = 0  
    while ... :  
        u = ...  
        n = n + 1  
    return n
```

Exercice 4

EXERCICE 3

5 points

Une entreprise a créé une Foire Aux Questions (« FAQ ») sur son site internet.

On étudie le nombre de questions qui y sont posées chaque mois.

Partie A : Première modélisation

Dans cette partie, on admet que, chaque mois :

- 90 % des questions déjà posées le mois précédent sont conservées sur la FAQ ;
- 130 nouvelles questions sont ajoutées à la FAQ.

Au cours du premier mois, 300 questions ont été posées.

Pour estimer le nombre de questions, en centaines, présentes sur la FAQ le n -ième mois, on modélise la situation ci-dessus à l'aide de la suite (u_n) définie par :

Partie B : Une autre modélisation

Dans cette partie, on considère une seconde modélisation à l'aide d'une nouvelle suite (v_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par :

$$v_n = 9 - 6 \times e^{-0,19 \times (n-1)}.$$

Le terme v_n est une estimation du nombre de questions, en centaines, présentes le n -ième mois sur la FAQ.

1. Préciser les valeurs arrondies au centième de v_1 et v_2 .
2. Déterminer, en justifiant la réponse, la plus petite valeur de n telle que $v_n > 8,5$.

Partie C : Comparaison des deux modèles

1. L'entreprise considère qu'elle doit modifier la présentation de son site lorsque plus de 850 questions sont présentes sur la FAQ.
Parmi ces deux modélisations, laquelle conduit à procéder le plus tôt à cette modification ?
Justifier votre réponse.
2. En justifiant la réponse, pour quelle modélisation y a-t-il le plus grand nombre de questions sur la FAQ à long terme ?