EXERCICES – VARIABLES ALÉATOIRES : CORRIGÉS

Exercice 1

Un joueur lance un dé parfait. Si le numéro sorti est 2 ou 4, il gagne 1,5 €, si le numéro sorti est impair il gagne 0,5 € et, si le 6 sort, il perd 5 €.
On appelle X la variable aléatoire qui à un numéro associe le gain algébrique en euros.
Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X et calculer $E(\mathrm{X})$.

Exercice 2

Une loterie organisée par une association sportive est constituée d'un ensemble de billets numérotés de 1 à 2000. Un des billets rapporte un lot de 500 €, deux billets un lot 150 € et cinq billets un lot de 100 €. Le prix du billet est de 2 €.
On achète un billet au hasard.
X est la variable aléatoire, définie sur Ω, égale au gain algébrique procuré par le billet.

1) Déterminer les valeurs prises par X en tenant compte du prix du billet.
2) Déterminer la loi de probabilité de X.
3) Calculer l'espérance mathématique de X. Qu'en concluez-vous ?
4) L'association décide de limiter le nombre de billets à un nombre x, avec x compris entre 1 et 2 000, pour que le jeu devienne équitable. Calculer x.

Exercice 1 Correction

Un joueur lance un dé parfait. Si le numéro sorti est 2 ou 4, il gagne 1,5 €, si le numéro sorti est impair il gagne 0,5 € et, si le 6 sort, il perd 5 €.
On appelle X la variable aléatoire qui à un numéro associe le gain algébrique en euros.
Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X et calculer $E(\mathrm{X})$.

X peut prendre les valeurs -5, 0,5 et 1,5.
Le dé étant parfait, on obtient :

$$p(\mathrm{X}=-5)=\frac{1}{6}\ ,\quad p(\mathrm{X}=0,5)=\frac{3}{6}\quad \text{et}\quad p(\mathrm{X}=1,5)=\frac{2}{6}.$$

Loi de probabilité de X :

X	–5	0,5	1,5	total
$p(\mathrm{X})$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{6}{6}$

Calcul de l'espérance :

$$E(\mathrm{X})=\frac{1}{6}\times(-5)+\frac{3}{6}\times 0,5+\frac{2}{6}\times 1,5=\frac{-5}{6}+\frac{1,5}{6}+\frac{3}{6}=\frac{-0,5}{6}=-\frac{1}{12}.$$

Exercice 2 Correction

Une loterie organisée par une association sportive est constituée d'un ensemble de billets numérotés de 1 à 2000. Un des billets rapporte un lot de 500 €, deux billets un lot 150 € et cinq billets un lot de 100 €. Le prix du billet est de 2 €. On achète un billet au hasard.
X est la variable aléatoire, définie sur Ω , égale au gain algébrique procuré par le billet.

1) *Déterminer les valeurs prises par X en tenant compte du prix du billet.*
En déduisant le prix d'achat du billet, X peut prendre les valeurs :
-2 , 98 , 148 et 498.

2) *Déterminer la loi de probabilité de X.*

$$p(X=498)=\frac{1}{2000} \quad , \quad p(X=148)=\frac{2}{2000} \quad \text{et} \quad p(X=98)=\frac{5}{2000}$$

8 billets sont gagnants donc 1992 billets sont perdants :

$$p(X=-2)=\frac{1992}{2000}$$

Loi de probabilité de X :

X	-2	98	148	498	total
$p(X)$	$\frac{1992}{2000}$	$\frac{5}{2000}$	$\frac{2}{2000}$	$\frac{1}{2000}$	$\frac{2000}{2000}$

3) *Calculer l'espérance mathématique de X. Qu'en concluez-vous ?*
Calcul de l'espérance :

$$E(X)=\frac{1992}{2000}\times(-2)+\frac{5}{2000}\times 98+\frac{2}{2000}\times 148+\frac{1}{2000}\times 498$$
$$=-\frac{3984}{2000}+\frac{490}{2000}+\frac{296}{2000}+\frac{498}{2000}$$
$$=-\frac{3984}{2000}+\frac{1284}{2000}$$
$$=-\frac{2700}{2000}=-1,35$$

En moyenne, un joueur 1,35 € par partie.

4) *L'association décide de limiter le nombre de billets à un nombre x, avec x compris entre 1 et 2 000, pour que le jeu devienne équitable. Calculer x.*
Pour x billets vendus, 8 billets sont gagnants et $x-8$ billets sont perdants.

La loi de probabilité de X devient :

X	-2	98	148	498	total
$p(X)$	$\frac{x-8}{x}$	$\frac{5}{x}$	$\frac{2}{x}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{x}{x}$

Le jeu est équitable si l'espérance est nulle :

$$E(X)=0 \iff \frac{x-8}{x}\times(-2)+\frac{5}{x}\times 98+\frac{2}{x}\times 148+\frac{1}{x}\times 498=0$$

En multipliant les deux membres de l'inéquation par x, on obtient :

$$(-2)(x-8)+490+296+498=0$$
$$\iff -2x+16+1284=0$$
$$\iff -2x=-1300$$
$$\iff x=\frac{-1300}{-2}=650$$

Le jeu est équitable pour 650 billets vendus.